

第 1 章「離散時間確率過程」

時系列データは背後に想定された母集団からの標本の実現値である，と考えるのが統計的推測の立場である．この母集団は，実際に観測される時系列データだけでなく，データとしては実現しなかった確率変数の全体からなるものであり，確率過程と呼ばれる．時系列解析の主要な目的は，確率過程の構造を推測することである．しかし，確率過程は一般に複雑なので，分析を容易にするために，そのためのモデル，すなわち，時系列モデルを想定するのが普通である．本章では，離散時間で観測される確率過程と時系列モデルについて考える．

1.1 確率過程

時系列データは，時間の経過とともに得られるデータであるが，通常のデータの場合と同様に，その背後には，データを生み出す母集団を考えるのが統計的推測の考え方である．すなわち，時点 t において実現する確率変数を y_t として，これらの全体を考えると，確率変数の系列 $\{y_t\}$ が得られる．これを確率過程と呼び，個々の系列をサンプル・パスと言う．時系列データは，このようなサンプル・パスのどれか 1 つが実現したものである．

確率過程は，観測時点 t の集合が離散的かどうかで 2 通りの場合が考えられる．離散的な場合を離散時間確率過程，連続的な場合を連続時間確率過程という．本章では前者について述べ，次章以降では，主として，後者を議論の対象とする．

確率過程については，確率変数に関してさまざまな分布が考えられると同様に，対象とする時系列データの特性に応じて，さまざまな確率過程のクラスが考案されている．今，離散的確率過程 $\{y_t\}$ の各時点 t において，期待値と分散が存在するものとして，

$$E(y_t) = \mu_t, \quad V(y_t) = \sigma_t^2$$

であるとしよう．ここで， μ_t や σ_t^2 は母集団のパラメータであり，これらの値をデータから推定することが，統計分析の目的の 1 つである．しかし， μ_t や σ_t^2 のように，期待値や分散が時間に依存するような非定常確率過程においては，これらを高精度で推定することは一般に困難である．なぜなら，各時点 t において得られる時系列データは 1 個しかないからである．

しかし，非定常な確率過程であっても，何らかの先験的情報によって，確率過程のクラスを狭め，特定化することができるならば， μ_t や σ_t^2 の推定が可能となる．例えば，確率過程がランダム・ウォーク

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad y_0 = 0 \quad \iff \quad y_t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t \quad (1)$$

に従うものとしよう．ここで， $\{\varepsilon_t\}$ は，平均 0，分散 σ^2 の独立，同一分布に従う誤差項であり，以下，このことを $\{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ と略記する．このとき， $\mu_t = 0$ ， $\sigma_t^2 = t\sigma^2$ となるから，推定すべきパラメータは $V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ のみであり，それは，階差系列 $\{y_t - y_{t-1}\}$ の標本分散で推定することができる．なお，ランダム・ウォークは，単位根系列とも呼ばれ，非定常時系列の代表として，以後，頻繁に登場することになるであろう．

統計的推測にとっては，平均や分散などが時間に依存しない場合を取り扱う方が容易である．以下では，まず，そのような場合を考えよう．

1.2 定常過程

離散的確率過程 $\{y_t\}$ が次の 2 つの性質をもつとする．

- (i) $E(y_t) = \mu$ (平均が時間に依存せずに一定)
- (ii) $\text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \gamma(|h|)$ (異時点間の共分散が時間差のみに依存)

このとき、 $\{y_t\}$ は定常過程であるという。分散は $V(y_t) = \gamma(0)$ となり、時間に依存せずに一定となる。なお、定常性には 2 通りの定義があり、上の場合を弱定常、あるいは広義定常という。

定常性のもう 1 つの定義は分布の観点から与えられる。それは、 $(y_{t_1}, \dots, y_{t_n})$ の同時分布と、時間 h だけシフトした $(y_{t_1+h}, \dots, y_{t_n+h})$ の同時分布が、すべての自然数 n とすべての整数 h に対して互いに同じになる場合であり、これを強定常、あるいは狭義定常という。強定常性はモーメントの存在を仮定しない。例えば、平均も分散も存在しない i.i.d. 系列は強定常であるが、弱定常ではない。しかし、統計的推測にとっては、弱定常性の方が扱いやすいので、以下では、弱定常性に限定して話を進める。そして、「弱定常」のことを単に「定常」ということにする。

定常過程の簡単な例としては、 $\gamma(h) = 0$ ($h \neq 0$) となるようなホワイト・ノイズがある。ホワイト・ノイズは、分散が一定の無相関過程であり、名称の由来については、次節で述べることにする。

上述のように、定常過程では、時点 s と時点 t の共分散 $\text{Cov}(y_s, y_t)$ が、時差 $|s - t|$ のみに依存するので、 $\gamma(|s - t|)$ と表現することができる。これを、時差 $|s - t|$ の自己共分散という。自己共分散は測定単位に依存するが、それを分散で除した量

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\gamma(h)}{V(y_t)} = \rho(-h) \quad (2)$$

は無名数であり、これを時差 h の自己相関という。また、 $\rho(h)$ の全体をコレログラムという。 $\rho(h)$ は、いかなる h に対しても、絶対値が常に 1 以下であり、1 に近いとき相関の程度が強くなる。

自己共分散あるいは自己相関は、定常過程 $\{y_t\}$ の時間的従属性の程度を表す指標であり、

$$S = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\text{Cov}(y_t, y_{t+h})| = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| \quad (3)$$

が有限確定ならば短期記憶、発散するならば長期記憶であるという。当然のことながら、長期記憶ならば、自己共分散はゆっくりと減衰する。例えば、 $h \rightarrow \infty$ のとき、 $\gamma(h) = O(h^{-1})$ ならば長期記憶となる。

・短期記憶時系列の例

(例 1.1) 最も簡単な例は、ホワイト・ノイズ、すなわち、分散一定の無相関過程であり、 $\gamma(0) = \sigma^2$, $\gamma(h) = 0$ ($h \neq 0$) の場合である。

(例 1.2) 代表的な例としては、ARMA (Auto-Regressive Moving-Average) モデルがある。次の ARMA(p, q) モデルを考えよう。

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \quad (4)$$

ここで、 $\{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ である。このモデルは、ラグ・オペレータ L を使って、次のようにコンパクトに表現するのが普通である。

$$\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t, \quad \phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p, \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q \quad (5)$$

ARMA(p, q) モデルは、AR 部分の特性方程式 $\phi(x) = 0$ の根がすべて単位円の外側にあれば、

$$y_t = \phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} \quad (6)$$

のように $MA(\infty)$ で表すことができ、 $\{y_t\}$ は定常となる。このとき、

$$\gamma(h) = \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_j \psi_k E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|} \quad (7)$$

であり、さらに、ある非負の整数 k と $0 < \alpha < 1$ となる α が存在して、 $h \rightarrow \infty$ のとき、 $\gamma(h) = O(|h|^k \alpha^{|h|})$ が成り立つことから、式 (3) の値が収束する (Anderson (1971, p.177))。したがって、AR 部分の特性方程式の根がすべて単位円外にあれば、ARMA モデルは定常で、必ず短期記憶となる。

このことを、定常な AR(1) モデル

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad y_t = \frac{\varepsilon_t}{1 - \phi L} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \varepsilon_{t-j}$$

で見てみよう。今の場合、定常性の条件は、 $|\phi| < 1$ であり、このとき、 $\gamma(h) = \sigma^2 \phi^{|h|} / (1 - \phi^2)$ となることから、次の結果を得る (問題 1)。

$$S = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| = \frac{\sigma^2}{(1 - |\phi|)^2} \quad (8)$$

なお、 $\phi = 1$ の場合、 $\{y_t\}$ は非定常なランダム・ウォーク (単位根系列) となることは、すでに述べた通りである。

他方、定常な ARMA(p, q) モデルでは、MA 部分の特性方程式 $\theta(x) = 0$ の根も、すべて単位円の外側にあると仮定される。この条件は、時点 t の誤差 ε_t を、無限の過去から現在までの観測値 y_t, y_{t-1}, \dots で表すことができる条件、すなわち、

$$\varepsilon_t = \theta^{-1}(L) \phi(L) y_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j y_{t-j}$$

と表すことができる条件であり、反転可能性と呼ばれる。反転可能性よりは弱い条件として、MA 部分の特性方程式の根は、単位円外だけでなく、単位円上の根、すなわち、MA 単位根も許容する場合がある。この条件を識別可能性という。これらの概念については、本章 5 節で再度取り上げるであろう。

ARMA(p, q) モデルの定常性、反転可能性、識別可能性をまとめると、次のようになる。

ARMA(p, q) モデルの定常性： $\phi(x) = 0$ の根がすべて $|x| > 1$

ARMA(p, q) モデルの反転可能性： $\theta(x) = 0$ の根がすべて $|x| > 1$

ARMA(p, q) モデルの識別可能性： $\theta(x) = 0$ の根がすべて $|x| \geq 1$

・長期記憶時系列の例

(例 1.3) 代表的な例としては、ARFIMA (Fractionally Integrated ARMA) モデルがある。次の ARFIMA($0, d, 0$) モデルを考えよう。

$$(1 - L)^d y_t = \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (9)$$

ここで、 d は、差分パラメータと呼ばれる整数でない実数である。時系列 $\{y_t\}$ の定常性の条件を考えるために、まず、 $(1-L)^{-d}$ を二項展開すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} (1-L)^{-d} &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-d}{j} (-L)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-d)(-d-1)\cdots(-d-j+1)}{j!} (-1)^j L^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(d+j-1)(d+j-2)\cdots(d+1)d}{j!} L^j \\ &= \frac{1}{\Gamma(d)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)} L^j = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j L^j, \quad \psi_j = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \end{aligned}$$

係数 ψ_j は、 $j \rightarrow \infty$ のとき、Stirling の公式

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

を使うことにより、 $\psi_j = O(j^{d-1})$ であることがわかる。したがって、 y_t の $MA(\infty)$ 表現

$$y_t = (1-L)^{-d} \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j} = \frac{1}{\Gamma(d)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)} \varepsilon_{t-j} \quad (10)$$

において、 $\psi_j^2 = O(j^{2d-2})$ であり、 $d < 1/2$ ならば $2d-2 < -1$ となることから、自己共分散が存在して、定常となることがわかる。実際、次のことが成り立つ (Adenstedt (1974), Hosking (1981))。

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= \text{Cov}(y_t, y_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+|h|} = \frac{1}{\Gamma^2(d)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)\Gamma(j+|h|+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+|h|+1)} \\ &= \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(h+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(h-d+1)} \end{aligned} \quad (11)$$

$\gamma(h)$ は、 $h \rightarrow \infty$ のとき、Stirling の公式より、 $\gamma(h) = O(h^{2d-1})$ となることがわかる。したがって、ARFIMA(0, d , 0) 系列は $d < 1/2$ のときに定常であるが、 $0 < d < 1/2$ ならば式 (3) の和が発散することから、長期記憶となる。なお、反転可能性の条件は、上記と同様の議論により、 $d > -1/2$ となることが了解されよう。

(例 1.4) ARFIMA(0, d , 0) を拡張した ARFIMA(p , d , q) モデルを考える。

$$(1-L)^d y_t = u_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (12)$$

ここで、 u_t は定常な ARMA(p , q) に従う。このとき、ARFIMA(0, d , 0) の場合と同様に、 $0 < d < 1/2$ のとき、定常、長期記憶となり、 $d > -1/2$ ならば反転可能となる (Granger-Joyeux (1980), Hosking (1981))。ただし、ARFIMA(0, d , 0) の場合と異なり、自己共分散の明示的な表現はできない。

定常過程はコレログラムの振る舞いにより特徴付けることができる。次節では、別の観点から定常過程の特徴付けを考える。そのことにより、式 (7) で与えられた自己共分散を計算することが可能になるであろう。

1.3 スペクトル理論

1.3.1 短期記憶の場合

本節では、定常過程に従う時系列を周波数領域から眺めて、その特徴を見ることにする。まず、定常過程 $\{y_t\}$ が短期記憶的な場合について考える。すなわち、自己共分散 $\gamma(h)$ が、

$$S = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty \quad (13)$$

をみたすものとする。このとき、自己共分散を係数とする Fourier 級数

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\omega} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi) \quad (14)$$

が定義されて、右辺の和は一様に絶対収束、そして極限の $f(\omega)$ は連続となる（問題 2）。 $f(\omega)$ を $\{y_t\}$ のスペクトル密度関数、あるいはスペクトラムという。

スペクトラムは、原点对称、周期 2π 、非負の関数である（問題 3）。このことから、 $f(\omega)$ の挙動は $[0, \pi]$ で考えれば十分である。このとき、 ω は周波数の意味合いをもち、 $2\pi/\omega$ は周期となる。周期は、周波数が π のときに最小値 2 を取り、周波数 0 で無限大となる。

なお、スペクトラムは、周波数 ω の代わりに、サイクル数 $\lambda = \omega/(2\pi)$ で定義されることがある。その場合のスペクトラムは、

$$g(\lambda) = 2\pi f(2\pi\lambda) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi ih\lambda} \quad (-1/2 \leq \lambda \leq 1/2) \quad (15)$$

で与えられ、周期は $1/\lambda$ となる。

式 (14) は、スペクトラムが自己共分散の Fourier 級数として定義されることを示している。逆に、スペクトラムが与えられたときに自己共分散を求めることもできる。そのためには、(14) の両辺に $e^{ih\omega}$ をかけて、 $[-\pi, \pi]$ の範囲で ω に関して積分すればよい。その結果、次の定理を得る。

定理 1.1 短期記憶定常過程の自己共分散 $\gamma(h)$ は、スペクトラム $f(\omega)$ あるいは $g(\lambda) = 2\pi f(2\pi\lambda)$ を使って、次のように表すことができる。

$$\gamma(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} f(\omega) d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi ih\lambda} g(\lambda) d\lambda \quad (16)$$

この定理から、コログラムとスペクトラムの関係は、確率密度関数と特性関数の関係と同様に、1 対 1 に対応することがわかる。コログラムは時間領域における特性値である。それに対して、スペクトラムは周波数領域における特性値である。この定理は、両者の情報が同値であることを物語っている。

スペクトラムの意味合いを理解するために、次の関係に注目してみよう。

$$\gamma(0) = V(y_t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega) d\omega = \int_{-1/2}^{1/2} g(\lambda) d\lambda \quad (17)$$

この関係は、時系列の分散 (= 変動) がスペクトラムの積分 (= 周波数ごとの和) で表されることを意味している。このことは、周波数 ω におけるスペクトラムの値 $f(\omega)$ が大きければ大きいほど、時系列に含まれる周波数 ω (= 周期 $2\pi/\omega$) に対応する成分の変動の程度が強いことを示唆している。

実際にスペクトラムを求めるためには，(14) の定義式に従って計算するのは一般に面倒である．簡単な計算方法は後述するとして，ここでは，式 (14) からでも計算が容易である最も単純な例を取り上げる．

(例 1.5) 分散一定の無相関過程，すなわち， $\gamma(0) = \sigma^2$ ， $\gamma(h) = 0$ ($h \neq 0$) の場合，スペクトラムは， $f(\omega) = \sigma^2/(2\pi)$ と定数になる．このことは，各周波数が同一の変動をもたらすことを意味し，それは，白色光の波長としての性質と同じである．この意味で，分散一定の無相関過程は，ホワイト・ノイズとも呼ばれる．

スペクトラムを導出するための簡単な方法を説明するために，次の確率過程を考えよう．

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (18)$$

このような MA(∞) 表現は，すでに，式 (6) などで与えられており，一般に線形過程と呼ばれる．まず， $\{\varepsilon_t\}$ のスペクトラム $f_\varepsilon(\omega)$ は， $f_\varepsilon(\omega) = \sigma^2/(2\pi)$ である．このとき， $\{y_t\}$ の自己共分散を $\gamma_y(h)$ とすれば，定理 1.1 を使って，次の関係が得られる．

$$\begin{aligned} \gamma_y(h) &= E(y_t y_{t+h}) = E\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \varepsilon_{t+h-k}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_k E(\varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t+h-k}) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(h+j-k)\omega} f_\varepsilon(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e^{ij\omega} \right|^2 f_\varepsilon(\omega) d\omega \end{aligned}$$

再度，定理 1.1 を使うことにより， $\{y_t\}$ のスペクトラムが，次の定理のように得られる．

定理 1.2 式 (18) の線形過程 $\{y_t\}$ のスペクトラム $f_y(\omega)$ は，

$$f_y(\omega) = \left| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e^{ij\omega} \right|^2 f_\varepsilon(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \alpha(e^{i\omega}) \right|^2 \quad \left(\alpha(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j L^j \right) \quad (19)$$

で与えられる．

定理 1.2 が示唆することは，2 つの定常過程 $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ が， $y_t = \beta(L) x_t$ の関係にあるならば， $\{y_t\}$ のスペクトラムは， $\{x_t\}$ のスペクトラムに $|\beta(e^{i\omega})|^2$ を乗じたものになる，ということである．工学では， $\beta(e^{i\omega})$ を周波数応答関数， $|\beta(e^{i\omega})|$ をゲイン関数， $|\beta(e^{i\omega})|^2$ をパワー伝達関数という．したがって，2 つのスペクトラムは，パワー伝達関数で結び付けられる．

以上のことを使えば，ARMA(p, q) 過程のスペクトラムを求めることは簡単である．実際，次の定理に従えばよい．

定理 1.3 定常な ARMA(p, q) 過程

$$\phi(L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t, \quad \phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p, \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

のスペクトラムは，次の形で与えられる．

$$f_y(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} \quad (20)$$

1.3.2 長期記憶の場合

ここでは，式 (12) で定義した ARFIMA(p, d, q) モデル

$$(1 - L)^d y_t = u_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (21)$$

を取り上げる．ここで， $u_t = \phi^{-1}(L) \theta(L) \varepsilon_t$ は ARMA(p, q) に従う．また， d は， $0 < d < 1/2$ となる実数である．

以上の条件のもとで， $\{y_t\}$ は定常過程となり， $y_t = (1 - L)^{-d} \phi^{-1}(L) \theta(L) \varepsilon_t$ は，(18) のような線形過程表現をもつ．したがって，定理 1.3 を使って， $\{y_t\}$ のスペクトラムは，

$$f_y(\omega; d) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - e^{i\omega}|^{2d}} \frac{|\theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} \quad (22)$$

で与えられる．ただし，長期記憶過程は条件 (13) をみたさないので，スペクトラムの連続性は保証されない．実際，(22) のスペクトラムは原点で発散しており，原点の近傍では，

$$|1 - e^{i\omega}|^{-2d} = \left(4 \sin^2 \frac{\omega}{2}\right)^{-d} = O(\omega^{-2d})$$

であるので， d が大きいほど ($= 1/2$ に近いほど)，原点での発散度が大きく，長周期成分が支配的となる．特に， $d = 1/2$ の場合は，非定常なので，ここでは除外されているが，その場合のスペクトラムも式 (22) のように定義され，原点近傍では (ω^{-1}) の大きさとなる．工学では，周波数として f を使うことが多く，このような長周期をもつものを $1/f$ ノイズと呼んでいる．

1.3.3 スペクトラムによる自己共分散の計算

定常過程のスペクトラムが与えられれば，定理 1.1 の式 (16) の関係を使って，自己共分散を求めることができる．定積分の計算は一般に複素積分となるが，以下で説明する方法を使うことにより，簡単に計算できる場合もある．なお，時間領域での通常の計算方法については，本章 5 節で説明する．

積分計算を実行するためには，次の定理が必要である．これは，Cauchy の留数定理から導出されるものである．

定理 1.4 複素関数 $g(z)$ が，滑らかな閉曲線 C で囲まれた領域 D 内の有限個の点 a_1, \dots, a_n を除き， D の閉領域 $D \cup C$ で正則のとき， $g(z)$ の C 上での積分は，次のようになる．

$$\int_C g(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(g, a_j) \quad (23)$$

ここで， $\text{Res}(g, a)$ は， g の a における留数であり， a が g の k 次の極ならば，

$$\text{Res}(g, a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k g(z)]$$

で計算される．特に， a が g の 1 次の極ならば，

$$\text{Res}(g, a) = \lim_{z \rightarrow a} [(z-a) g(z)]$$

となる．

この定理を使って，ARMA(p, q) 過程 $\phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t$ のスペクトラム $f_y(\omega)$ から，自己共分散 $\gamma_y(h)$ ($h \geq 0$) を計算するには，閉曲線 C を単位円の円周として，次のようにすればよい．

$$\begin{aligned}\gamma_y(h) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_y(\omega) e^{ih\omega} d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} e^{ih\omega} d\omega \\ &= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_C \frac{|\theta(z)|^2}{|\phi(z)|^2} z^h \frac{dz}{iz} = \frac{\sigma^2}{2\pi i} \int_C \frac{|\theta(z)|^2}{|\phi(z)|^2} z^{h-1} dz = \frac{\sigma^2}{2\pi i} \int_C g(z) dz \\ &= \sigma^2 \sum_k \text{Res}(g, a_k)\end{aligned}\tag{24}$$

ここで， $g(z) = |\phi(z)|^{-2}|\theta(z)|^2 z^{h-1}$ であり， a_1, a_2, \dots は， g の極である．

(例 1.6) ARMA(2,1) モデルで重根がない場合

$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \alpha L)(1 - \beta L)$, $\alpha \neq \beta$, $\theta(L) = 1 - \gamma L$ とすれば，(23) の $g(z)$ は，

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{|1 - \gamma z|^2 z^{h-1}}{|1 - \alpha z|^2 |1 - \beta z|^2} = \frac{(1 - \gamma z)(1 - \gamma z^{-1})z^{h-1}}{(1 - \alpha z)(1 - \alpha z^{-1})(1 - \beta z)(1 - \beta z^{-1})} \\ &= \frac{(1 - \gamma z)(z - \gamma)z^h}{(1 - \alpha z)(z - \alpha)(1 - \beta z)(z - \beta)}\end{aligned}$$

となる．単位円内の $g(z)$ の極は， α と β のみであり， $\alpha \neq \beta$ であるから，ともに 1 次の極である．したがって， $g(z)$ の留数は， $(z - \alpha)g(z)|_{z=\alpha} + (z - \beta)g(z)|_{z=\beta}$ となるから，定理 1.4 を使って，

$$\begin{aligned}\gamma_y(h) &= \sigma^2 \left[\frac{(1 - \gamma\alpha)(\alpha - \gamma)\alpha^h}{(1 - \alpha^2)(1 - \beta\alpha)(\alpha - \beta)} + \frac{(1 - \gamma\beta)(\beta - \gamma)\beta^h}{(1 - \alpha\beta)(\beta - \alpha)(1 - \beta^2)} \right] \\ &= \sigma^2 \frac{(1 - \beta^2)(1 - \gamma\alpha)(\alpha - \gamma)\alpha^h - (1 - \alpha^2)(1 - \gamma\beta)(\beta - \gamma)\beta^h}{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)(1 - \alpha\beta)(\alpha - \beta)}\end{aligned}$$

を得る．

(例 1.7) AR(2) モデルで重根がある場合

$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = (1 - \alpha L)^2$ とすれば，(23) の $g(z)$ は，

$$\begin{aligned}g(z) &= \frac{z^{h-1}}{|1 - \alpha z|^4} = \frac{z^{h-1}}{(1 - \alpha z)^2(1 - \alpha z^{-1})^2} \\ &= \frac{z^{h+1}}{(1 - \alpha z)^2(z - \alpha)^2}\end{aligned}$$

となる．単位円内の $g(z)$ の極は， α のみであり，2 次の極である．したがって， $g(z)$ の α における留数は，

$$\begin{aligned}g(z, \alpha) &= \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} [(z - \alpha)^2 g(z)] = \lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d}{dz} \frac{z^{h+1}}{(1 - \alpha z)^2} \\ &= \frac{\alpha^h [1 + \alpha^2 + h(1 - \alpha^2)]}{(1 - \alpha^2)^3}\end{aligned}$$

となるから，自己共分散 $\gamma_y(h)$ と自己相関 $\rho_y(h)$ は，

$$\gamma_y(h) = \frac{\alpha^h \sigma^2 [1 + \alpha^2 + h(1 - \alpha^2)]}{(1 - \alpha^2)^3}, \quad \rho_y(h) = \alpha^h \left[1 + \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} h \right]$$

となる。

長期記憶的な ARFIMA モデルでは，単位円周上に極をもち，しかも，被積分関数は実数次の極をもつから，式 (23) のような留数計算をすることはできない．式 (16) を使って数値積分を行うのが 1 つの方法であるが，一般には，自己共分散を明示的に求めるのは不可能である．ただし，ARFIMA(0, d , 0) の場合の自己共分散 $\gamma_y(h; d)$ は，明示的に求めることができ，その結果，すでに式 (11) で示したように，

$$\begin{aligned}\gamma_y(h; d) &= \int_{-\pi}^{\pi} f_y(\omega; d) e^{ih\omega} d\omega = \frac{\sigma^2}{4^d \pi} \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{\omega}{2}\right)^{-2d} \cos h\omega d\omega \\ &= \frac{\Gamma(1-2d)\Gamma(h+d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(h-d+1)} = \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-h-d)\Gamma(1+h-d)}\end{aligned}\quad (25)$$

となることが知られている。

1.4 線形過程

定常過程の一般形として，式 (18) で定義した線形過程を再び考えてみよう。

$$u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j} = \alpha(L) \varepsilon_t, \quad \alpha_0 = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 < \infty, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (26)$$

ここで， $\alpha(L)$ は，ラグ・オペレータ L の多項式であり，

$$\alpha(L) = 1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j L^j$$

により定義される．係数列 $\{\alpha_j\}$ と誤差項 $\{\varepsilon_t\}$ に関するこれらの条件のもとで， $\{u_t\}$ は定常過程となる．実際，期待値と自己共分散は，

$$E(u_t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j E(\varepsilon_{t-j}) = 0, \quad \text{Cov}(u_t, u_{t+h}) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+|h|} \quad (27)$$

となる．なお，(26) のように無限和を含む確率過程の定義や，(27) にあるように，その期待値や自己共分散の計算の正当化などについては，次章，あるいは，田中 (2006) を参照されたい．

線形過程は，非常に一般的な定常過程である．実際，任意の定常過程は，線形過程（ただし，i.i.d. 系列ではなく，ホワイト・ノイズ系列から生成される表現）と，決定論的（完全な予測が可能）な定常過程の和として表現できることが知られている．この事実を，分解定理という（例えば，Brockwell-Davis (1996), Fuller (1996) を参照）．特に，決定論的成分がない定常過程は，純粋非決定論的過程と呼ばれる．したがって，線形過程は，純粋非決定論的過程の一般的な表現とみなすことができる．

なお，決定論的な定常過程の例としては，

$$x_t = A \cos \lambda t + B \sin \lambda t \quad (28)$$

がある．ここで， A と B は，ともに平均 0，分散 σ^2 で，互いに無相関な確率変数， λ は定数である．定常であることは， $E(x_t) = 0$ と，

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x_t, x_{t+h}) &= E[(A \cos \lambda t + B \sin \lambda t)(A \cos \lambda(t+h) + B \sin \lambda(t+h))] \\ &= \sigma^2 [\cos \lambda t \cos \lambda(t+h) + \sin \lambda t \sin \lambda(t+h)] \\ &= \sigma^2 \cos(\lambda t - \lambda(t+h)) = \sigma^2 \cos \lambda h\end{aligned}$$

からわかる．しかし，確率変数 A と B は一度実現したら同一の値を取るから， x_t の将来の値は完全に予測可能であり，統計的推測の観点からは， A と B は未知パラメータとみなすことができる．したがって，決定論的な定常過程は，トレンドなどと同様に取り扱うことが可能である．このような理由から，定常過程を議論する際は，決定論的な部分は除外して考えるのが普通である．

・B-N 分解

再び，式 (26) の線形過程に戻って，この表現を变形するために，次のように，少し強い条件を仮定してみよう．

$$u_t = \alpha(L) \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j |\alpha_j| < \infty, \quad \alpha(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \neq 0 \quad (29)$$

ここで，条件 $\alpha(1) \neq 0$ は，特性方程式 $\alpha(x) = 0$ が単位根をもたないということであり，スペクトラムの観点からは， $\{u_t\}$ のスペクトラムが，

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e^{ij\omega} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\alpha(e^{i\omega})|^2$$

で与えられることから， $\alpha(1) \neq 0$ は，スペクトラムが原点で 0 にならないことと同値である．このとき，次の変換を考える．

$$\alpha(L) = \alpha(1) + (\alpha(L) - \alpha(1)) = \alpha(1) - (1 - L) \tilde{\alpha}(L) \quad (30)$$

ここで，

$$\tilde{\alpha}(L) = \frac{\alpha(L) - \alpha(1)}{L - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_j L^j, \quad \tilde{\alpha}_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} \alpha_k \quad (31)$$

であり，式 (29) の条件より，次のことが成り立つ．

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\alpha}_j| = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \sum_{k=j+1}^{\infty} \alpha_k \right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} |\alpha_k| = \sum_{j=1}^{\infty} j |\alpha_j| < \infty \quad (32)$$

以上のことを使って，式 (29) の線形過程表現を次のように変形する．

$$u_t = \alpha(L) \varepsilon_t = [\alpha(1) - (1 - L) \tilde{\alpha}(L)] \varepsilon_t = \alpha(1) \varepsilon_t + \tilde{\varepsilon}_{t-1} - \tilde{\varepsilon}_t, \quad \tilde{\varepsilon}_t = \tilde{\alpha}(L) \varepsilon_t \quad (33)$$

ここで，確率過程 $\{\tilde{\varepsilon}_t\} = \{\tilde{\alpha}(L) \varepsilon_t\}$ は短期記憶的である．実際，式 (29) の条件が成り立つことから，

$$\sum_{h=0}^{\infty} |\text{Cov}(\tilde{\varepsilon}_t, \tilde{\varepsilon}_{t+h})| \leq \sigma^2 \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\alpha}_j| |\tilde{\alpha}_{j+h}| \leq \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\alpha}_j| \right)^2 < \infty \quad (34)$$

となる．そして，式 (30) の関係から，

$$\sum_{t=1}^T u_t = \sum_{t=1}^T \alpha(L) \varepsilon_t = \sum_{t=1}^T [\alpha(1) \varepsilon_t - (\tilde{\varepsilon}_t - \tilde{\varepsilon}_{t-1})] = \alpha(1) \sum_{t=1}^T \varepsilon_t + \tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_T \quad (35)$$

を得る．この最後の表現において，最右辺第 1 項は $O_p(\sqrt{T})$ ，第 2 項と第 3 項は $O_p(1)$ である．第 1 項は，i.i.d. 過程の和の定数倍の量であるから，式 (35) は，線形過程の和が，本質的

に i.i.d. 系列の和の定数倍で表されることを示唆している．このような表現をもたらす (30) の変換を B-N 分解と呼ぶ．B-N は，この方法を提案した論文 Beveridge-Nelson (1981) の著者の頭文字である．

B-N 分解の 1 つの効用は，定常過程の和に関する次の CLT (Central Limit Theorem: 中心極限定理) を容易に示すことができることであろう．

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T u_t = \frac{1}{\sqrt{T}} \alpha(1) \sum_{t=1}^T \varepsilon_t + o_p(1) \Rightarrow N(0, \alpha^2(1) \sigma^2) \quad (36)$$

ここで，極限分布の分散は， $\{u_t\}$ のスペクトラムを $f(\omega)$ ，時差 h の自己共分散を $\gamma(h)$ とし，次の形で表すこともできる．

$$\alpha^2(1) \sigma^2 = 2\pi f(0) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) \quad (37)$$

分散 $\alpha^2(1) \sigma^2$ は，定常過程 $\{u_t\}$ の和（を正規化したもの）の分散であり，周波数 0（= 周期 ∞ ）におけるスペクトラムの値に関連付けられることから， u_t の長期分散と呼ばれる．他方， u_t の分散 $\gamma(0)$ は，短期分散と呼ばれる．もちろん，i.i.d. 系列においては，長期分散と短期分散は一致する．

次章以降においても，極限定理を示す際に，B-N 分解を有効に使うことになるであろう．ここで考えた B-N 分解は，無限次数のラグ多項式を，実数単位根で評価した部分と残りの部分に分解したものであるが，これを，以下で説明するように，複素単位根で評価した部分とそれ以外に分解して考えることもできる．

・複素 B-N 分解

実数 θ を $0 < \theta < \pi$ として，次の表現を考えよう．

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha(L)\varepsilon_t = [\alpha(e^{i\theta}) + \alpha(L) - \alpha(e^{i\theta})] \varepsilon_t = [\alpha(e^{i\theta}) - (1 - e^{-i\theta}L)\tilde{\alpha}^{(\theta)}(L)] \varepsilon_t \\ &= \alpha(e^{i\theta})\varepsilon_t + e^{-i\theta}\tilde{\varepsilon}_{t-1}^{(\theta)} - \tilde{\varepsilon}_t^{(\theta)} \end{aligned} \quad (38)$$

ただし，

$$\tilde{\varepsilon}_t^{(\theta)} = \tilde{\alpha}^{(\theta)}(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_j^{(\theta)}\varepsilon_{t-j}, \quad \tilde{\alpha}_j^{(\theta)} = \sum_{k=j+1}^{\infty} \alpha_k e^{i(k-j)\theta}$$

線形過程 $\{u_t\}$ を，式 (38) のように，複素単位根で評価した部分とそれ以外の部分に分解することを複素 B-N 分解という．確率過程 $\{\tilde{\varepsilon}_t\}$ は，複素数の係数をもつ複素確率過程である．複素確率過程が定常となるのは，実部と虚部がともに定常となる場合である．確率過程 $\{\tilde{\varepsilon}_t\}$ は，式 (29) で与えられた条件のもとで定常となる（問題 4）．この分解は，Phillips-Solo (1992) で最初に使われたものである． $\theta = 0$ ならば，B-N 分解に帰着することが了解されよう．

複素 B-N 分解の効用を示そう．そのために，線形過程 $\{u_t\}$ に対する Fourier 変換

$$\tilde{z}_t^{(\theta)} = \sum_{j=1}^t \begin{pmatrix} u_j \cos j\theta \\ u_j \sin j\theta \end{pmatrix}$$

を考えよう．式 (38) の複素 B-N 分解を使うと，次のことが成り立つ（問題 5）．

$$\tilde{z}_t^{(\theta)} = \begin{pmatrix} a(\theta) & -b(\theta) \\ b(\theta) & a(\theta) \end{pmatrix} z_t^{(\theta)} + w_t^{(\theta)} = K(\theta)z_t^{(\theta)} + w_t^{(\theta)} \quad (39)$$

ここで,

$$a(\theta) = \operatorname{Re}[\alpha(e^{i\theta})], \quad b(\theta) = \operatorname{Im}[\alpha(e^{i\theta})]$$

$$K(\theta) = \begin{pmatrix} a(\theta) & -b(\theta) \\ b(\theta) & a(\theta) \end{pmatrix}, \quad z_t^{(\theta)} = \sum_{j=1}^t \begin{pmatrix} \varepsilon_j \cos j\theta \\ \varepsilon_j \sin j\theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_t^{(\theta)} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}[\tilde{\varepsilon}_0^{(\theta)} - e^{it\theta} \tilde{\varepsilon}_t^{(\theta)}] \\ \operatorname{Im}[\tilde{\varepsilon}_0^{(\theta)} - e^{it\theta} \tilde{\varepsilon}_t^{(\theta)}] \end{pmatrix}$$

である．式 (39) の最右辺において，第 1 項は，i.i.d. 系列の Fourier 変換の定数倍となっており，その大きさは $O_p(\sqrt{t})$ である．他方，第 2 項は，残差項であり，その大きさは $O_p(1)$ である．すなわち，(39) が示唆することは，線形過程の Fourier 変換 $\tilde{z}_t^{(\theta)}$ は，i.i.d. 過程の Fourier 変換 $z_t^{(\theta)}$ に定数行列 $K(\theta)$ をかけたものに，ほぼ等しいということである．ここで， $z_t^{(\theta)}$ は，

$$z_t^{(\theta)} = z_{t-1}^{(\theta)} + \mathbf{v}_t^{(\theta)} = \sum_{j=1}^t \mathbf{v}_j^{(\theta)}, \quad \mathbf{v}_t^{(\theta)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_t \cos t\theta \\ \varepsilon_t \sin t\theta \end{pmatrix}$$

と表すことができ， $\{\mathbf{v}_t^{(\theta)}\}$ はマルチンゲール差となる．すなわち， $E(\mathbf{v}_t^{(\theta)} | \mathbf{v}_{t-1}^{(\theta)}) = \mathbf{0}$ となる．さらに，

$$V(\mathbf{v}_t^{(\theta)} | \mathbf{v}_{t-1}^{(\theta)}) = \sigma^2 \begin{pmatrix} \cos^2 t\theta & \cos t\theta \sin t\theta \\ \cos t\theta \sin t\theta & \sin^2 t\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つ．したがって，マルチンゲール差の和に関する CLT が次の形で成り立つ (Helland (1982))．

$$\frac{1}{\sqrt{T}} z_T^{(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \mathbf{v}_t^{(\theta)} \Rightarrow N\left(\mathbf{0}, \frac{\sigma^2}{2} I_2\right)$$

ここで， I_2 は 2 次の単位行列である．

以上のことから，式 (38) の線形過程の Fourier 変換に関する CLT を次のように導出することができる．

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T \begin{pmatrix} u_t \cos t\theta \\ u_t \sin t\theta \end{pmatrix} &= K(\theta) \frac{1}{\sqrt{T}} z_T^{(\theta)} + o_p(1) \\ &\Rightarrow N\left(\mathbf{0}, \frac{\sigma^2}{2} K(\theta) K'(\theta)\right) = N(\mathbf{0}, \pi f(\theta) I_2) \end{aligned} \quad (40)$$

ここで， $f(\theta)$ は， $\{u_t\}$ のスペクトラム

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j e^{ij\omega} \right|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi} (a^2(\omega) + b^2(\omega))$$

を θ で評価した値である．

複素 B-N 分解は，あとの章でも有効に利用することになるであろう．

1.5 自己相関

定常確率過程の自己共分散あるいは自己相関の求め方については，本章 3.3 節で，スペクトラムを使った方法について述べたが，ここでは，具体的な時系列モデルに即して，通常の時空間領域における求め方について説明する．以下，時差 j の自己共分散と自己相関を，それぞれ， $\gamma(j)$ と $\rho(j)$ で表すことにする．

1.5.1 AR(p) モデルの場合

次の AR(p) モデルを考えよう .

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \iff \phi(L)y_t = \varepsilon_t \quad (41)$$

式 (41) の両辺に y_{t-j} ($j > 0$) をかけて期待値を取ると ,

$$\gamma(j) = \phi_1 \gamma(j-1) + \phi_2 \gamma(j-2) + \cdots + \phi_p \gamma(j-p) \quad (42)$$

となる . したがって , 両辺を $\gamma(0)$ で割ることにより , p 階の差分方程式

$$\rho(j) = \phi_1 \rho(j-1) + \phi_2 \rho(j-2) + \cdots + \phi_p \rho(j-p) \quad (j > 0) \quad (43)$$

を得る . $p = 1$ ならば , この解は明らかに

$$\rho(j) = \phi_1 \rho(j-1) = \phi_1^j \quad (j > 0)$$

となる . $p \geq 2$ の場合には , 特性方程式 $\phi(x) = 0$ の根を $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ として , 根がすべて異なる場合と重根をもつ場合とに分けて考える .

(i) 特性方程式 $\phi(x) = 0$ の根がすべて異なるとき

c_1, \dots, c_p を定数として , 一般解は ,

$$\rho(j) = c_1/\lambda_1^j + c_2/\lambda_2^j + \cdots + c_p/\lambda_p^j \quad (j \geq 0) \quad (44)$$

で与えられる . c_1, \dots, c_p を求めるには , まず , $\rho(1), \dots, \rho(p-1)$ を求める必要がある . そのためには , (43) で $j = 1, \dots, p-1$ として , $\rho(1), \dots, \rho(p-1)$ に関する次の連立方程式を解けばよい .

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \phi_1 + \phi_2 \rho(1) + \cdots + \phi_p \rho(p-1) \\ \rho(2) &= \phi_1 \rho(1) + \phi_2 + \cdots + \phi_p \rho(p-2) \\ &\vdots \\ \rho(p-1) &= \phi_1 \rho(p-2) + \phi_2 \rho(p-3) + \cdots + \phi_p \rho(1) \end{aligned} \quad (45)$$

その上で , 式 (44) において , $j = 0, \dots, p-1$ として , c_1, \dots, c_p を未知数とする次の連立方程式を解けばよい .

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 + \cdots + c_p \\ \rho(1) &= c_1/\lambda_1 + c_2/\lambda_2 + \cdots + c_p/\lambda_p \\ &\vdots \\ \rho(p-1) &= c_1/\lambda_1^{p-1} + c_2/\lambda_2^{p-1} + \cdots + c_p/\lambda_p^{p-1} \end{aligned} \quad (46)$$

(例 1.8) 例として , AR(2) モデルの場合を考えよう . 特性方程式 $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$ の 2 根 λ_1 と λ_2 が異なるとして , これらの逆数 $a_1 = 1/\lambda_1$, $a_2 = 1/\lambda_2$ を定義しよう . まず , (44) から $\rho(j) = c_1 a_1^j + c_2 a_2^j$ を得る . 式 (45) から , $\rho(1) = \phi_1 + \phi_2 \rho(1)$ となるので , $\rho(1) = \phi_1 / (1 - \phi_2) = (a_1 + a_2) / (1 + a_1 a_2)$ を得る . そして , (46) において , 2 本の方程式 $1 = c_1 + c_2$, $\rho(1) = c_1 a_1 + c_2 a_2$ から , c_1 と c_2 が求まり , 結局 , AR(2) モデルの自己相関は ,

$$\begin{aligned} \rho(j) &= c_1 a_1^j + c_2 a_2^j = \frac{a_1(1 - a_2^2)}{(a_1 - a_2)(1 + a_1 a_2)} a_1^j - \frac{a_2(1 - a_1^2)}{(a_1 - a_2)(1 + a_1 a_2)} a_2^j \\ &= \frac{(1 - a_2^2)a_1^{j+1} - (1 - a_1^2)a_2^{j+1}}{(a_1 - a_2)(1 + a_1 a_2)} \quad (j \geq 0) \end{aligned} \quad (47)$$

となる． $|a_1| < 1, |a_2| < 1$ であるから，自己相関は時差が大きくなるとともに非常に速く 0 に減衰することがわかる．

特性方程式が複素根をもつ場合 ($\phi_1^2 + 4\phi_2 < 0$ の場合) には，必ず共役根となり，自己相関は，ある周期をもって減衰する．方程式 $z^2 - \phi_1 z - \phi_2 = 0$ の 2 つの複素根は $a_1 = re^{i\omega}$ ， $a_2 = re^{-i\omega}$ と表すことができる．ただし， $r = \sqrt{-\phi_2}$ ($0 < r < 1$) であり， ω は $\cos \omega = \text{Re}(a_1)/r$ ， $\sin \omega = \text{Im}(a_1)/r$ をみたく $0 < \omega < \pi$ となる実数である．このとき，(47) は，

$$\rho(j) = \frac{\sin(j+1)\omega - r^2 \sin(j-1)\omega}{(1+r^2)\sin\omega} r^j = \frac{\cos(j\omega + \theta)}{\cos\theta} r^j \quad (j \geq 0) \quad (48)$$

となる．ただし，位相 θ は， $\cos\theta = (1+r^2)\sin\omega/\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\omega}$ ， $\tan\theta = -(1-r^2)/((1+r^2)\tan\omega)$ をみたく $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ となる実数である．このことから，自己相関は，基本周期 $2\pi/\omega$ を保ちながら減衰することがわかる．

(例 1.9) 複素根をもつ AR(2) モデルの場合

$$y_t = 0.8y_{t-1} - 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (49)$$

方程式 $z^2 - 0.8z + 0.64 = 0$ の根は， $a_1, a_2 = 2(1 \pm \sqrt{3}i)/5 = 0.8e^{\pm\pi i/3}$ となるので， $r = 0.8$ ， $\omega = \pi/3$ を得る．また， $\cos\theta = (1+r^2)\sin\omega/\sqrt{(1-r^2)^2 + 4r^2\sin^2\omega} = 41/(2\sqrt{427}) = 0.99206$ であり， $\tan\theta = -(1-r^2)/((1+r^2)\tan\omega) = -0.1267354$ より， $\theta = -0.1261$ を得る．したがって，(49) の AR(2) モデルの自己相関は，

$$\rho(j) = \frac{(0.8)^j}{0.99206} \times \cos\left(\frac{\pi j}{3} - 0.1261\right) \quad (j \geq 0) \quad (50)$$

となる．このコレログラムは，基本周期 $2\pi/(\pi/3) = 6$ で減衰することがわかる．

(ii) 特性方程式 $\phi(x) = 0$ が重根をもつとき

p 個の根 (実根あるいは複素根) のうち，異なる根を ξ_1, \dots, ξ_k として，重複度をそれぞれ m_1, \dots, m_k とする ($m_1 + \dots + m_k = p$)．このとき，(44) の一般解は，

$$\rho(j) = c_{11}/\xi_1^j + c_{12}j/\xi_1^j + \dots + c_{1m_1}j^{m_1-1}/\xi_1^j + \dots \\ + c_{k1}/\xi_k^j + c_{k2}j/\xi_k^j + \dots + c_{km_k}j^{m_k-1}/\xi_k^j \quad (j \geq 0) \quad (51)$$

で与えられる．ここで，係数 $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{km_k}$ (全部で p 個) を求めるには，初期条件 $\rho(1), \dots, \rho(p-1)$ を (45) の連立方程式から求めてから，(46) と同様の連立方程式を解けばよい．

(例 1.10) 重根をもつ AR(2) モデルの場合

$$y_t = y_{t-1} - 0.25y_{t-2} + \varepsilon_t \quad (52)$$

特性方程式 $\phi(x) = 1 - x + 0.25x^2 = (1 - 0.5x)^2 = 0$ の根は 2 (重根) であるから，(51) を使って，一般解

$$\rho(j) = c_{11}/2^j + c_{12}j/2^j$$

を得る．したがって，

$$\rho(0) = 1 = c_{11}, \quad \rho(1) = c_{11}/2 + c_{12}/2 = (1 + c_{12})/2$$

であり, (45) を使って, $\rho(1) = 0.8$ となるから, $c_{12} = 0.6$ を得る. 以上より, (52) の AR(2) モデルの自己相関は,

$$\rho(j) = (1 + 0.6j)/2^j \quad (j \geq 0)$$

となる.

・分散の求め方

分散 $\gamma(0)$ を求めるために, 式 (41) の両辺に y_t をかけて期待値を取ると,

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(2) + \cdots + \phi_p\gamma(p) + \sigma^2 \\ &= \gamma_0(\phi_1\rho(1) + \phi_2\rho(2) + \cdots + \phi_p\rho(p)) + \sigma^2 \end{aligned}$$

となる. これより,

$$\gamma(0) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho(1) - \phi_2\rho(2) - \cdots - \phi_p\rho(p)} \quad (53)$$

が得られる. なお, 自己共分散 $\gamma(j)$ を求めるには, $\gamma(j) = \gamma(0)\rho(j)$ とすればよい.

・AR 係数の求め方

今までは, AR 係数が与えられたときの自己相関や分散の計算方法を説明してきた. 今度は, 逆に, AR(p) モデルの自己相関が与えられたとき, 係数 ϕ_1, \dots, ϕ_p を求める方法を説明する. 式 (43) において $j = 1, 2, \dots, p$ の場合を考えると, 次の p 本の方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \cdots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(2) &= \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho(p-2) \\ &\vdots \\ \rho(p) &= \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \cdots + \phi_p \end{aligned} \quad (54)$$

上の p 本の方程式を行列やベクトルを使って, コンパクトに表現すると

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\rho} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(p-1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(p-1) & \rho(p-2) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho(p) \end{pmatrix} \quad (55)$$

となる. これを Yule-Walker 方程式という. Yule-Walker 方程式は, 母集団における自己相関と AR 係数の関係を表現する方程式であるが, 母集団自己相関を標本自己相関で置き換えることにより, 未知のパラメータ ϕ_1, \dots, ϕ_p を推定する手がかりを与えている.

(例 1.11) AR(2) モデルの場合の Yule-Walker 方程式の解は, 式 (54) あるいは (55) において, $p = 2$ の場合を考えればよい. その結果, 次の解を得る.

$$\phi_1 = \frac{\rho(1)(1 - \rho(2))}{1 - \rho^2(1)}, \quad \phi_2 = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

1.5.2 MA(q) モデルの場合

次の MA(q) モデルを考えよう .

$$y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \iff y_t = \theta(L) \varepsilon_t \quad (56)$$

明らかに , $E(y_t) = 0$, $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)$ である . また ,

$$\begin{aligned} \gamma(j) &= E[(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-j} - \theta_1 \varepsilon_{t-j-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-j-q})] \\ &= \sigma^2(-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \cdots + \theta_{q-j} \theta_q) \quad (j = 1, \dots, q) \end{aligned}$$

となり , $j > q$ のとき , $\gamma(j) = 0$ となる . したがって ,

$$\rho(j) = \frac{-\theta_j + \theta_1 \theta_{j+1} + \cdots + \theta_{q-j} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \quad (j = 1, \dots, q) \quad (57)$$

であり , $j > q$ のとき , $\rho(j) = 0$ である . 自己共分散も自己相関も , モデルの次数 q のところで切断が生じる点が , AR モデルの場合との違いである .

すでに述べたように , MA(q) モデルは , 常に定常であるから , 定常性の観点からはパラメータに制約をおく必要はない . しかし , 別の観点からパラメータ制約が生じる . その 1 つは , 本章 2 節で述べた反転可能性である . それは , 式 (56) を ε_t に関して解いた場合 , y_t, y_{t-1}, \dots の線形結合で表現できるかどうか , すなわち , AR(∞) 表現可能かどうかという条件である . そのための条件は , 特性方程式 $\theta(x) = 0$ の根の絶対値がすべて 1 より大きくなることである .

このことから , 例えば , MA(1) モデル $y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ は反転不可能となる . MA モデルを使った分析においては , 反転可能性を仮定するのが普通であるが , この条件よりも少しゆるやかな識別可能性が仮定される場合もある . それは , MA(q) モデルの自己共分散 $\gamma(0), \gamma(1), \dots, \gamma(q)$ が与えられたとき , 係数パラメータ $\theta_1, \dots, \theta_q$ と , 誤差項 ε_t の分散 σ^2 が一意に決められるための条件である . 同じことであるが , スペクトラムが与えられた場合に , これらのパラメータが一意的となるための条件である .

(例 1.12) MA(1) モデルの識別可能性

次の 2 つの MA(1) モデル (a) と (b) を考えてみよう .

$$(a) x_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (b) y_t = \xi_t - \frac{1}{\theta} \xi_{t-1}, \quad \{\xi_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \theta^2 \sigma^2)$$

これら 2 つのモデルは , 明らかに , 同一の $\gamma(0) = \sigma^2(1 + \theta^2)$ と $\gamma(1) = -\theta \sigma^2$ をもち , 識別不可能である . しかし , $|\theta| \leq 1$ と制約すれば , 識別可能となる .

一般の MA(q) モデルにおいては , 特性方程式 $\theta(x) = 0$ の根の絶対値が 1 以上ならば識別可能である . 識別可能性は , 反転可能性よりも弱い条件なので , 後者が仮定されれば自動的に成り立つ . しかし , 反転可能性を仮定することが不適切な場合もある . 例えば , 1 回の階差を取ったら定常な線形過程となるような系列 $\{y_t\}$ は , 1 回の階差が $(1-L)y_t = \alpha(L)\varepsilon_t$ のように線形過程で表現されるが , もう 1 度階差を取った系列は $z_t = (1-L)^2 y_t = (1-L)\alpha(L)\varepsilon_t$ となり , 時系列 $\{z_t\}$ は反転不可能となる . すなわち , 過剰階差の場合は , 反転不可能な MA モデルを排除することはできない .

以上の理由から , 実際の分析においては , 識別可能性は前提とするが , 反転可能性については必ずしも仮定しない . その場合 , 反転不可能な状況は , 特性方程式 $\theta(x) = 0$ の根の絶対値が 1 の場合に生じる . このような根は MA 単位根と呼ばれ , MA モデルが単位根をもつかどうかを調べる検定を , MA 単位根検定という . 階差系列が MA 単位根をもつということは , モデルが反転不可能な状況であり , 過剰階差が起きていることを意味し , 階差を取る前の系列がすでに定常である . 他方 , 階差変換後の時系列が MA 単位根をもたない場合は , 階差は適切

であり，反転可能な定常系列になっていることを意味する．この観点から，MA 単位根検定は，時系列の定常性の検定に使うことができる．この点については，あとの章で再度説明する．

なお，定常性の検定の観点からは，AR 単位根検定を行うのが普通である．それは AR モデルの特性方程式の根の絶対値が 1 かどうかの検定であり，この点の議論もあとの章で行う．

1.5.3 ARMA(p, q) モデルの場合

次の ARMA(p, q) モデルを考えよう．

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q} \iff \phi(L)y_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (58)$$

ここで，特性方程式 $\phi(x) = 0$ と $\theta(x) = 0$ は互いに共通根をもたないとする．すでに述べたように，ARMA(p, q) モデルは， $\phi(x) = 0$ の根の絶対値がすべて 1 より大きいときに定常， $\theta(x) = 0$ の根の絶対値がすべて 1 より大きいときに反転可能， $\theta(x) = 0$ の根の絶対値がすべて 1 以上のときに識別可能である．

定常な ARMA モデルの自己共分散や自己相関の計算は，AR や MA モデルの場合と異なり，少々やっかいである．まず，(58) の両辺に y_{t-h} ($h > q$) をかけて期待値を取ると， $E(\varepsilon_{t-j} y_{t-h}) = 0$ ($j < h$) であることから，次のことが成り立つ（問題 6）．

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \cdots + \phi_p \gamma(h-p) \quad (h > q) \quad (59)$$

これは，AR(p) の自己共分散と同様の表現である．

他方， $\gamma(1), \dots, \gamma(q)$ を求めるために，(58) の両辺に y_{t-k} ($k = 1, \dots, q$) をかけて期待値を取る．その際，MA(∞) 表現

$$y_t = \phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j} \quad (\alpha_0 = 1) \quad (60)$$

を使うと，

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \phi_1 \gamma(k-1) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p) + E\left(\left(\varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q \varepsilon_{t-q}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-k-j}\right) \\ &= \phi_1 \gamma(k-1) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p) + \sigma^2 (-\theta_k - \theta_{k+1} \alpha_1 - \cdots - \theta_q \alpha_{q-k}) \end{aligned} \quad (61)$$

を得る．また， $\gamma(0)$ を求めるには，(58) の両辺に y_t をかけて期待値を取ると，

$$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma^2 (1 - \theta_1 \alpha_1 - \cdots - \theta_q \alpha_q) \quad (62)$$

を得る．複雑ではあるが，以上の方程式から，一般に任意の時差の自己共分散が求められ，したがって，自己相関も得られることになる．

(例 1.13) 例として，次の ARMA(2,1) モデルを考えよう．

$$y_t = 0.8y_{t-1} - 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1} = \frac{1 - 0.5L}{1 - 0.8L + 0.64L^2} \varepsilon_t \quad (63)$$

式 (60) の MA(∞) 表現の係数は， $(1 - 0.8L + 0.64L^2)(1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots) = 1 - 0.5L$ の関係から， $\alpha_1 = 0.3$ ， $\alpha_2 = -0.4$ ，一般に $\alpha_j = 0.8\alpha_{j-1} - 0.64\alpha_{j-2}$ となる．したがって，(61) と (62) から，

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \phi_1 \gamma(0) + \phi_2 \gamma(1) + \sigma^2 (-\theta_1) = 0.8\gamma(0) - 0.64\gamma(1) - 0.5\sigma^2 \\ \gamma(0) &= \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \sigma^2 (1 - \theta_1 \alpha_1) = 0.8\gamma(1) - 0.64\gamma(2) + 0.85\sigma^2 \end{aligned}$$

を得る．この方程式の $\gamma(2)$ に，(59) の関係を使って， $\gamma(2) = 0.8\gamma(1) - 0.64\gamma(0)$ を代入すれば， $\gamma(0) = 1.694\sigma^2$ ， $\gamma(1) = 0.522\sigma^2$ を得る．

なお，自己共分散を求める方法としては，すでにスペクトラムによる方法を本章 3 節で示してある．今の例の場合については，(例 1.6) の方法により，同じ結果が得られることを確かめられたい(問題 8)．

1.5.4 ARFIMA(p, d, q) モデルの場合

次の ARFIMA(p, d, q) モデルを考えよう．

$$(1 - L)^d y_t = u_t = \frac{\theta(L)}{\phi(L)} \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (64)$$

ここで， u_t は定常な ARMA(p, q) に従う．また， d は， $0 < d < 1/2$ となる実数である．以上の条件のもとで， $\{y_t\}$ は長期記憶定常過程となり， $y_t = (1 - L)^{-d} \phi^{-1}(L) \theta(L) \varepsilon_t$ は，(60) のような線形過程表現をもつ．しかし，この表現から自己共分散を求めるのは一般に困難である．

この場合の自己共分散 $\gamma_y(h)$ を求めるには，定理 1.1 から，ARFIMA (p, d, q) のスペクトラム $f_y(\omega)$ を使って，次の積分を計算すればよい．

$$\gamma_y(h) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ih\omega} f_y(\omega) d\omega = \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ih\omega}}{|1 - e^{i\omega}|^{2d}} \frac{|\theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} d\omega \quad (65)$$

この積分は，留数定理を使って計算することはできない．また，一般に，パラメータの値を指定しなければ計算は不可能である．ただし，ARFIMA($0, d, 0$) の場合には，式 (25) のように明示的に計算することができる．

1.6 偏自己相関

相関の概念を拡張して偏相関が考えられると同様に，時系列に対しても，自己相関に基づいて偏自己相関を考えることができる．時系列 $\{y_t\}$ の時差 h の偏自己相関とは，時点 $t - h$ と時点 t の間に存在する $h - 1$ 個の観測値 $y_{t-h+1}, \dots, y_{t-1}$ からの影響を除去したあとの y_{t-h} と y_t の相関である．

観測値 y_t から $\mathbf{y}(h) = (y_{t-h+1}, \dots, y_{t-1})'$ の影響を除去するということは， y_t を $\mathbf{y}(h)$ に回帰して残差 $v_t = y_t - \beta' \mathbf{y}(h)$ を求めることである．ここで，

$$\beta = \Sigma^{-1} \gamma^h, \quad \Sigma = V(\mathbf{y}(h)), \quad \gamma^h = (\gamma(h-1), \gamma(h-2), \dots, \gamma(1))'$$

である．同様に， y_{t-h} から $\mathbf{y}(h)$ の影響を除去するということは， y_{t-h} を $\mathbf{y}(h)$ に回帰して残差 $w_t = y_{t-h} - \delta' \mathbf{y}(h)$ を求めることである．ここで，

$$\delta = \Sigma^{-1} \gamma_h, \quad \Sigma = V(\mathbf{y}(h)), \quad \gamma_h = (\gamma(1), \gamma(2), \dots, \gamma(h-1))'$$

である．このとき，時差 h の偏自己相関 $\lambda(h)$ とは，2 つの残差 v_t と w_t の相関であり，

$$\begin{aligned} \lambda(h) &= \frac{\text{Cov}(v_t, w_t)}{\sqrt{V(v_t) V(w_t)}} = \frac{\text{Cov}(y_t - \beta' \mathbf{y}(h), y_{t-h} - \delta' \mathbf{y}(h))}{V(y_t - \beta' \mathbf{y}(h))} \\ &= \frac{\gamma(h) - \gamma_h' \Sigma^{-1} \gamma^h}{\gamma(0) - (\gamma^h)' \Sigma^{-1} \gamma^h} = \frac{\gamma(h) - \gamma_h' \Sigma^{-1} \gamma^h}{\gamma(0) - \gamma_h' \Sigma^{-1} \gamma_h} \\ &= \frac{\rho(h) - \rho_h' \Phi^{-1} \rho^h}{1 - (\rho^h)' \Phi^{-1} \rho^h} = \frac{\rho(h) - \rho_h' \Phi^{-1} \rho^h}{1 - \rho_h' \Phi^{-1} \rho_h} \quad (h > 1) \end{aligned} \quad (66)$$

与えられる．ここで， $\rho(h) = \gamma(h)/\gamma(0)$ ， $\rho_h = \gamma_h/\gamma(0)$ ， $\rho^h = \gamma^h/\gamma(0)$ ， $\Phi = \Sigma/\gamma(0)$ である．また， $\lambda(1) = \rho(1)$ であり，このことから， $\lambda(2) = (\rho(2) - \rho^2(1))/(1 - \rho^2(1))$ が得られる．しかし，偏自己相関の実際の計算は，(66) から直接行うのではなく，低い時差の偏自己相関から逐次的に計算する方法が考案されており，Durbin-Levinson アルゴリズムとして知られている (Brockwell-Davis (1996)) ．

上記の偏自己相関の定義は統計学的観点から与えたが，数学的には，定常過程 $\{y_t\}$ の時差 h の偏自己相関 $\lambda(h)$ は，次の方程式における解 ϕ_{hh} に一致することがわかる (問題 7) ．

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{h1} \\ \phi_{h2} \\ \vdots \\ \phi_{hh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(h) \end{pmatrix} \quad (67)$$

AR(p) モデル $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t$ においては， $\phi_j = 0$ ($j > p$) である．したがって，式 (67) と (55) の Yule-Walker 方程式を比較することにより，AR(p) モデルの偏自己相関 $\lambda(h)$ は， $h > p$ ならば 0 となることがわかる．また， $\lambda(p) = \phi_p$ となることも了解されよう．このように，AR(p) モデルの偏自己相関は，時差 p において切断を生じる．

他方，MA(1) モデル $y_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ の偏自己相関は，

$$\lambda(1) = \rho(1) = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}, \quad \lambda(2) = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} = \frac{-\theta_1^2}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4}$$

であることから，一般に，次の形で与えられる (問題 9) ．

$$\lambda(h) = \frac{-\theta_1^h}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_1^{2h}} \quad (h > 0) \quad (68)$$

以上のことから，AR(p) モデルの自己相関は切断することなく 0 に減衰するが，偏自己相関は時差 p のところで切断が生じる．他方，MA(q) モデルの自己相関は時差 q のところで切断が生じるが，偏自己相関は切断しないことがわかる．なお，ARMA モデルにおいては，自己相関も偏自己相関も切断は生じない．

ARFIMA(p, d, q) モデルの偏自己相関も，自己相関が与えられれば，ARMA モデルの場合と同様に求めることができる．特に，ARFIMA(0, d , 0) の場合，時差 h の偏自己相関 $\lambda(h)$ は，次のようになる (Hosking (1981)) ．

$$\lambda(h) = \frac{d}{h-d} \quad (h > 0) \quad (69)$$

したがって， $h \rightarrow \infty$ のとき， $\lambda(h) = O(h^{-1})$ となり，減少のスピードは遅い．なお，時差 h の自己相関 $\rho(h)$ は， $h \rightarrow \infty$ のとき， $\rho(h) = O(h^{2d-1})$ であるので，減少の程度は，自己相関の方がさらに遅いことになる．なお，偏自己相関が上の形で与えられることについては， $\lambda(1) = \rho(1) = d/(1-d)$ は明らかであり，一般の $\lambda(h)$ については，Durbin-Levinson アルゴリズムを使って，数学的帰納法により証明できる (Hosking (1981) 参照) ．

1.7 非定常過程

非定常過程の典型的な例として，本章 1 節においてランダム・ウォーク (単位根系列) を取り上げたが，ここでは，他にもよく使われる非定常な時系列モデルについて説明する．

最も一般的なモデルは，差分パラメータ d を自然数とした場合の次のモデルである．

$$(1-L)^d y_t = u_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j}, \quad y_0 = y_{-1} = \dots = y_{-d+1} = 0 \quad (t = 1, \dots, T) \quad (70)$$

ここで、 $\{u_t\}$ は定常な線形過程に従う誤差項である。差分パラメータ d は 1 以上なので、 $\{y_t\}$ は非定常となり、 $d < 1/2$ の場合と異なり、 $MA(\infty)$ 表現はできない。しかし、 d は自然数なので、 $(1 - L)^d$ は有限次のラグ多項式となり、 d 個の初期値 $y_0, y_{-1}, \dots, y_{-d+1}$ が与えられれば、 y_1, y_2, \dots が生成される。

式 (70) のモデルを $I(d)$ モデルという。I は、Integrated の頭文字である。 $I(d)$ モデルは、 d 回の階差を取ったら定常となるような時系列モデルであり、 d が大きいほど非定常性の度合いが強くなる。 $I(1)$ モデルは、一般化ランダム・ウォークとも呼ばれる。ランダム・ウォーク（単位根系列）は、 $I(1)$ モデルにおいて、誤差項が i.i.d. となっている場合である。Box-Jenkins の $ARIMA(p, d, q)$ モデルは、 $I(d)$ モデルにおいて、誤差項が ARMA に従う特別な場合である。

第 1 章 練習問題

1. 定常な AR(2) モデル $y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ において, 時差 h の自己共分散を $\gamma(h)$ とするとき, 式 (3) で定義された S の値を求めよ. ただし, 特性方程式 $1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0$ は重根をもたないとする.
2. 短期記憶定常過程のスペクトラムは, 区間 $[-\pi, \pi]$ で連続であることを示せ.
3. 次の形で定義されるスペクトラムは, 非負となることを示せ.

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-ih\omega} \quad (-\pi \leq \omega \leq \pi)$$

4. 次の形で定義される複素確率過程 $\{\tilde{\varepsilon}_t^{(\theta)}\}$ は, 定常となることを示せ.

$$\tilde{\varepsilon}_t^{(\theta)} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_j^{(\theta)} \varepsilon_{t-j}, \quad \tilde{\alpha}_j^{(\theta)} = \sum_{k=j+1}^{\infty} \alpha_k e^{i(k-l)\theta}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j |\alpha_j| < \infty$$

5. 線形過程 $u_t = \alpha(L) \varepsilon_t$ に対して, そのコサイン変換は, 次のように表されることを複素 B-N 分解を使って示せ.

$$\sum_{j=1}^t u_j \cos j\theta = \operatorname{Re}[\alpha(e^{i\theta})] \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \cos \theta - \operatorname{Im}[\alpha(e^{i\theta})] \sum_{j=1}^t \varepsilon_j \sin \theta + r_t^{(\theta)}$$

ここで, $r_t^{(\theta)}$ は線形過程である.

6. ARMA(p, q) モデルの自己共分散 $\gamma(h)$ は, 次の性質をもつことを示せ.

$$\gamma(h) = \phi_1 \gamma(h-1) + \dots + \phi_p \gamma(h-p) \quad (h > q)$$

7. 定常過程の時差 h の自己相関を $\rho(h)$ として, 次の方程式を定義する.

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \dots & \rho(h-1) \\ \rho(1) & 1 & \dots & \rho(h-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(h-1) & \rho(h-2) & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{h1} \\ \phi_{h2} \\ \vdots \\ \phi_{hh} \end{pmatrix} = \Phi_h \phi = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \vdots \\ \rho(h) \end{pmatrix}$$

このとき, 次のことが成り立つことを示せ.

$$\phi_{hh} = \frac{\rho(h) - \boldsymbol{\rho}'_h \Phi_{h-1}^{-1} \boldsymbol{\rho}^h}{1 - (\boldsymbol{\rho}^h)' \Phi_{h-1}^{-1} \boldsymbol{\rho}^h} = \frac{\rho(h) - \boldsymbol{\rho}'_h \Phi_{h-1}^{-1} \boldsymbol{\rho}^h}{1 - \boldsymbol{\rho}'_h \Phi_{h-1}^{-1} \boldsymbol{\rho}^h}$$

ただし,

$$\boldsymbol{\rho}_h = \begin{pmatrix} \rho(1) \\ \vdots \\ \rho(h-1) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}^h = \begin{pmatrix} \rho(h-1) \\ \vdots \\ \rho(1) \end{pmatrix}$$

8. ARMA(2,1) モデル $y_t = 0.8y_{t-1} - 0.64y_{t-2} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$ に従う時系列 $\{y_t\}$ の分散, および時差 1 と 2 の自己共分散をスペクトラムを使った方法で求めよ .
9. MA(1) モデル $y_t = \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$ の時差 h の偏自己相関 $\lambda(h)$ は, 次の形で与えられることを示せ .

$$\lambda(h) = \frac{-\theta_1^h}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_1^{2h}} \quad (h > 0)$$