第 1 章「確率過程と時系列モデル」

1．確率過程 (Stochastic Process)

確率過程: 時点 t の添字をもつ確率変数 y_t の系列全体のこと．$\{y_t\}$ で表す.

(a) **離散的確率過程**：時点 t の集合が可算的な確率過程（通常は，t=1, 2, . . .)

(b) **連続的確率過程**：時点 t の集合が連続的な確率過程（t は実数の集合の点)

以下では，主として離散的確率過程を考える.

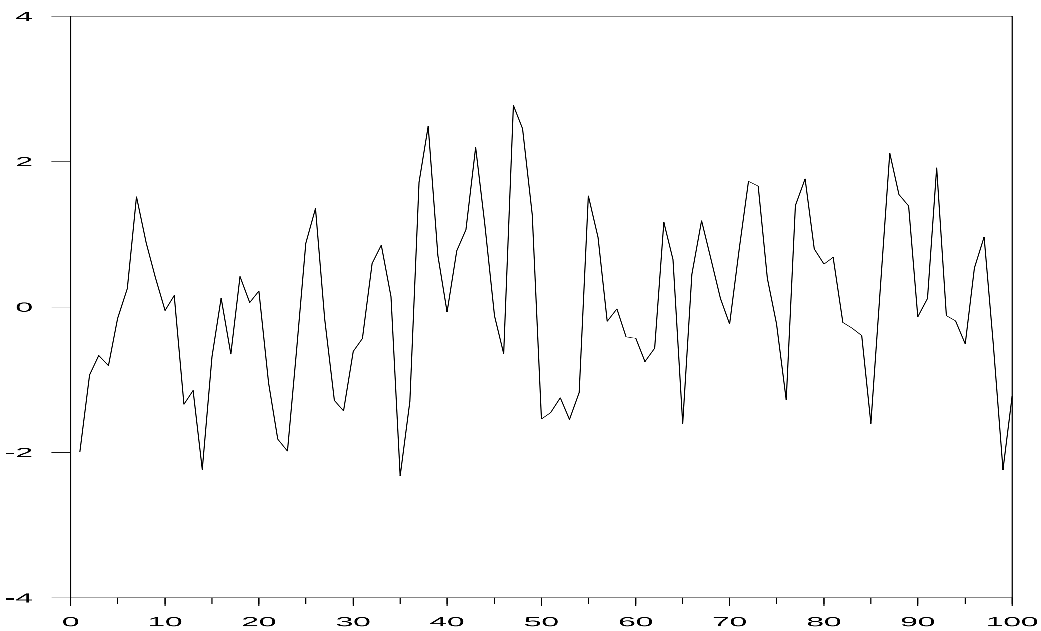
確率変数と確率過程の違い： 確率過程 $\{y_t\}$ において，各時点 t を固定すれば時点 t における確率変数 y_t となる．ただし，確率過程からの n 個のデータ $y_1, \cdots, y_n$ は各時点から 1 個ずつ得られるものである.

確率過程の期待値と分散

$$E(y_t) = \mu_t, \qquad V(y_t) = \sigma_t^2$$

のように，時点 t における期待値と分散は t に依存してもよい（非定常過程）．しかし，各時点からデータが 1 個しか得られないので，μ_t や σ_t^2 を推定することは無意味となる．ただし，モデルを特定化すれば推定可能である（ランダム・ウォークモデル，ARCH モデルなど）．以下では，モデルを導入する前に，まず，
$\Longrightarrow$ 確率過程のクラスを制限して考える.

Realization of AR(2) process



2．定常過程 (Stationary Process)

定義： 確率過程 $\{y_t\}$ が定常過程であるとは，

$$E(y_t) = \mu \quad (\text{定数}) \qquad Cov(y_s, y_t) = \gamma_{|s-t|} \quad (\text{時間差のみに依存})$$

となることをいう．このとき，分散は一定となる．

定義： $\{y_t\}$ が定常過程のとき，$\gamma_h = Cov(y_t, y_{t-h})$ を時差 h の $\{y_t\}$ の**自己共分散** (Autocovariance) という．また，$\rho_h = \gamma_h/\gamma_0$ を時差 h の**自己相関** (Autocorrelation) という．自己相関は測定単位に依存しない無名数であり，自己共分散よりも有用である．

Note: $\gamma_h = \gamma_{-h}, \qquad \rho_h = \rho_{-h}, \qquad \rho_0 = 1$

定義： 自己相関 γ_h を h の関数とみなしたものを**自己相関関数 (acf)** あるいは**コレログラム**という．

例１： 無相関で分散が一定の確率過程 (無相関過程，ホワイト・ノイズ)，すなわち

$$Cov(y_s, y_t) = \begin{cases} \sigma^2 & (s = t \text{ のとき}) \\ 0 & (s \neq t \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる $\{y_t\}$ は定常過程である．

例２： $\{y_t\}$ が i.i.d.(μ, σ^2) の列ならば定常である．

（注） i.i.d.(μ, σ^2) ＝平均 μ，分散 σ^2 の独立，同一分布に従う確率過程

例３： X と Y を互いに無相関で平均 0, 分散 σ^2 の確率変数とし，λ を定数とするとき，

$$y_t = X \cos \lambda t + Y \sin \lambda t$$

は定常過程となる．実際，$E(y_t) = 0$ で，

$$\begin{aligned} \gamma_h &= Cov(y_t, y_{t-h}) = E(y_t\, y_{t-h}) \\ &= E\left[(X \cos \lambda t + Y \sin \lambda t)\,(X \cos \lambda(t-h) + Y \sin \lambda(t-h))\right] \\ &= \sigma^2 \left[\cos \lambda t \cos \lambda(t-h) + \sin \lambda t \sin \lambda(t-h)\right] \\ &= \sigma^2 \cos \lambda h \end{aligned}$$

となる．

3．定常な時系列モデルの例

以下，$\{\varepsilon_t\} \sim$ i.i.d.$(0,\sigma^2)$ とする．また，L をラグ・オペレータ $Ly_t = y_{t-1}$, $L^2 y_t = y_{t-2}, \cdots$ として，ラグ多項式

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \cdots - \phi_p L^p\,,$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \cdots - \theta_q L^q\,,$$

を定義しておく.

(A) AR(p) モデル $\phi(L)y_t = m + \varepsilon_t$

$$y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t \tag{1}$$

AR(p) モデルの定常性 (Stationarity) の条件： 特性方程式

$$\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p = 0$$

の根の絶対値がすべて１より大きいこと（＝根がすべて単位円外にあること）.

例４：

1. AR(1) $y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ の定常性： $|\phi_1| < 1$
2. AR(2) $y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t$ の定常性：$\phi_2 + \phi_1 < 1$, $\phi_2 - \phi_1 < 1$, $-1 < \phi_2 < 1$

定常な AR(p) モデルは MA(∞) 表現

$$y_t = \phi(L)^{-1}(m + \varepsilon_t) = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \varepsilon_{t-j}, \quad \pi_0 = 1$$

をもつ.

AR(1) の場合:

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{1 - \phi_1 L}(m + \varepsilon_t) \\ &= [1 + \phi_1 L + (\phi_1 L)^2 + \cdots](m + \varepsilon_t) \\ &= \frac{1}{1 - \phi_1} m + \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \varepsilon_{t-j} \end{aligned}$$

これより,

$$E(y_t) = \frac{1}{1 - \phi_1} m, \qquad \gamma_0 = V(y_t) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^2 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}$$

定常な AR(p) モデルの平均，分散とコレログラム

平均の求め方: (1) の両辺の期待値を取ることにより,

$$\begin{aligned} \mu &= E(y_t) = E(m + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t) \\ &= m + \mu(\phi_1 + \cdots + \phi_p) \\ &= \frac{m}{1 - \phi_1 - \cdots - \phi_p} \\ &= \frac{m}{\phi(1)} \end{aligned}$$

Note: このとき，(1) は

$$y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(y_{t-p} - \mu) + \varepsilon_t \tag{2}$$

あるいは

$$\phi(L)(y_t - \mu) = \varepsilon_t$$

と表すことができる．

コレログラムの求め方： (2) 式の両辺に $y_{t-j} - \mu$ $(j > 0)$ をかけて期待値を取ると，

$$\gamma_j = \phi_1\gamma_{j-1} + \phi_2\gamma_{j-2} + \cdots + \phi_p\gamma_{j-p}$$

が得られる．そして，両辺を $\gamma_0 = V(y_t)$ で割ることにより，

$$\rho_j = \phi_1\rho_{j-1} + \phi_2\rho_{j-2} + \cdots + \phi_p\rho_{j-p} \tag{3}$$

を得る．これは p 階の差分方程式であり，解くためには p 個の初期値が必要．そのために，(3) において j=1,2, $\cdots$, p の場合を考えると，次の p 本の方程式 (**Yule-Walker 方程式**）が得られる．

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + \cdots + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho_{p-2} \\
\cdot \quad & \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
\cdot \quad & \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
\cdot \quad & \quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \quad\quad \cdot \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + \cdots + \phi_p
\end{aligned}$$

行列表現では

$$R\phi = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_p \end{pmatrix}$$

分散 γ_0 の求め方： (2) 式の両辺に $y_t - \mu$ をかけて期待値を取ると，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \cdots + \phi_p\gamma_p + \sigma^2 \\
&= \gamma_0\left(\phi_1\rho_1 + \phi_2\rho_2 + \cdots + \phi_p\rho_p\right) + \sigma^2
\end{aligned}$$

が得られる．これより，

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - \cdots - \phi_p\rho_p}$$

例 5： AR(1), AR(2) の分散とコレログラム

1. AR(1): $\rho_1 = \phi_1$, $\rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} = \phi_1^h$ $(h \geq 1)$
   $\gamma_0 = \sigma^2/(1-\phi_1\rho_1) = \sigma^2/(1-\phi_1^2)$

2. AR(2): $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}$, $\rho_h = \phi_1\rho_{h-1} + \phi_2\rho_{h-2}$ $(h \geq 2)$
   $\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2 = \left(\phi_1^2 + \phi_2(1-\phi_2)\right)/(1-\phi_2)$
   $\gamma_0 = \sigma^2/(1-\phi_1\rho_1-\phi_2\rho_2) = (1-\phi_2)\sigma^2/[(1+\phi_2)\{(1-\phi_2)^2-\phi_1^2\}]$

(B) MA(q) モデル $y_t = m + \theta(L)\varepsilon_t$

$$y_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} = m + \theta(L)\varepsilon_t \tag{4}$$

明らかに，$E(y_t) = m$ である．また，

$$\begin{aligned}
\gamma_0 &= V(y_t) = \sigma^2(1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2), \\
\gamma_1 &= Cov(y_t, y_{t-1}) \\
&= E\left[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-1-q})\right] \\
&= \sigma^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2 + \cdots + \theta_{q-1}\theta_q), \\
\gamma_2 &= Cov(y_t, y_{t-2}) \\
&= E\left[(\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q})(\varepsilon_{t-2} - \theta_1\varepsilon_{t-3} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-2-q})\right] \\
&= \sigma^2(-\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \cdots + \theta_{q-2}\theta_q),
\end{aligned}$$

より，$\rho_h = 0$ $(h \geq q+1)$ である．また，$h = 1, 2, \cdots, q$ のとき，

$$\rho_h = \frac{-\theta_h + \theta_1\theta_{h+1} + \cdots + \theta_{q-h}\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2}, \qquad (h = 1, 2, \cdots, q)$$

MA(q) モデルの反転可能性 (Invertibility)： MA(q) モデルを AR(∞) で表現できること．そのための条件は，特性方程式

$$\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \cdots - \theta_q x^q = 0$$

の根の絶対値がすべて 1 より大きいこと（＝根がすべて単位円外にあること）．

MA(1) の場合：

$$\begin{aligned}
\varepsilon_t &= \frac{1}{1-\theta_1 L}(y_t - m) \\
&= [1 + \theta_1 L + (\theta_1 L)^2 + \cdots](y_t - m) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\theta_1^j y_{t-j} - \frac{1}{1-\theta_1}m
\end{aligned}$$

(C) ARMA(p,q) モデル $\phi(L)y_t = m + \theta(L)\varepsilon_t$

$$y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q} \tag{5}$$

定常性： $\phi(x) = 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \cdots - \phi_p x^p = 0$ の根がすべて単位円外

反転可能性： $\theta(x) = 1 - \theta_1 x - \theta_2 x^2 - \cdots - \theta_q x^q = 0$ の根がすべて単位円外

例６：　ARMA(1,1) の MA(∞) 表現

$$
\begin{aligned}
y_t &= \frac{1}{1-\phi_1 L}(m + (1-\theta_1 L)\varepsilon_t) \\
&= \frac{1}{1-\phi_1 L}m + [1 + \phi_1 L + (\phi_1 L)^2 + \cdots](1-\theta_1 L)\varepsilon_t \\
&= \frac{1}{1-\phi_1}m + [1 + (\phi_1 - \theta_1)L + \phi_1(\phi_1-\theta_1)L^2 + \cdots]\varepsilon_t \\
&= \frac{1}{1-\phi_1}m + \varepsilon_t + (\phi_1 - \theta_1)\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^j \varepsilon_{t-1-j}
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
E(y_t) = \frac{1}{1-\phi_1}m, \qquad \gamma_0 = \sigma^2[1 + (\phi_1-\theta_1)^2\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^{2j}] = \sigma^2\left[1 + \frac{(\phi_1-\theta_1)^2}{1-\phi_1^2}\right]
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= E\left[\left(\varepsilon_t + (\phi_1-\theta_1)\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^j\varepsilon_{t-1-j}\right)\left(\varepsilon_{t-1} + (\phi_1-\theta_1)\sum_{j=0}^{\infty}\phi_1^j\varepsilon_{t-2-j}\right)\right] \\
&= \sigma^2[(\phi_1-\theta_1) + (\phi_1-\theta_1)^2\phi_1(1+\phi_1^2+\phi_1^4+\cdots)] \\
&= \sigma^2\frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\phi_1^2}, \\
\gamma_h &= \phi_1\gamma_{h-1} \qquad (h \geq 2)
\end{aligned}
$$

４．偏自己相関 (Partial Autocorrelation)

定義： 定常過程 $\{y_t\}$ のラグ h の**偏自己相関**とは，次の方程式における解 ϕ_{hh} のことである．

$$
\begin{pmatrix}
1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{h-1} \\
\rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{h-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\rho_{h-1} & \rho_{h-2} & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\phi_{h1} \\ \phi_{h2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_{hh}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\rho_1 \\ \rho_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \rho_h
\end{pmatrix}
$$

Note: ラグ h の偏自己相関とは，時点 $t-h$ と 時点 t の間に存在する $h-1$ 個の観測値 $y_{t-h+1}, \cdots y_{t-1}$ の影響を除去したあとの y_{t-h} と y_t の相関係数である．

（注） 変数 x, y, z を分析対象とする場合，x と y の偏相関係数とは，z の影響を除去したあとの x と y の相関係数である．

例７：　定常な AR(p) モデル

$$
y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \cdots + \phi_p y_{t-p} + \varepsilon_t
$$

の偏自己相関は，ラグ p で切断を生じる．

$$\phi_{11} = \rho_1, \quad \phi_{22} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}, \quad \cdots, \quad \phi_{pp} = \phi_p, \quad \phi_{hh} = 0 \quad (h \geq p+1).$$

例８： MA(1) モデル $y_t = m + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$ の偏自己相関は減衰する．

$$\phi_{hh} = \frac{-\theta_1^h}{1 + \theta_1^2 + \theta_1^4 + \cdots, +\theta_1^{2h}}$$

例９： 定常な ARMA(p,q) モデルの偏自己相関は自己相関と同様に切断を生じない．

５．逆自己相関 (Inverse Autocorrelation)

定義： 定常，反転可能な ARMA(p,q) 過程 $\phi(L)y_t = m + \theta(L)\varepsilon_t$ におけるラグ h の**逆自己相関**とは，ARMA(q,p) 過程 $\theta(L)y_t = m + \phi(L)\varepsilon_t$ におけるラグ h の自己相関のことである．

例１０： AR(p) モデルの逆自己相関は，ラグ p で切断を生じる．

５．AR, MA, ARMA の相互比較（$z_t = y_t - \mu$）

	AR: $\phi(L)z_t = \varepsilon_t$	MA: $z_t = \theta(L)\varepsilon_t$	ARMA: $\phi(L)z_t = \theta(L)\varepsilon_t$
AR 表現	有限列	無限列	無限列
MA 表現	無限列	有限列	無限列
定常性	$\phi(x) = 0$ の根がすべて $\|x\| > 1$	常に定常	$\phi(x) = 0$ の根がすべて $\|x\| > 1$
反転可能性	常に反転可能	$\theta(x) = 0$ の根がすべて $\|x\| > 1$	$\theta(x) = 0$ の根がすべて $\|x\| > 1$
自己相関	減衰	切断	減衰
偏自己相関	切断	減衰	減衰
逆自己相関	切断	減衰	減衰