第２章「ＡＲＭＡモデルからの標本分布」

１．線形過程 (Linear Process)

以下では，次の MA(∞) 過程

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \varepsilon_{t-j} = \mu + \alpha(L)\varepsilon_t \tag{1}$$

を考える．ここで，

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_j| < \infty, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \neq 0, \qquad \alpha_0 = 1, \qquad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$$

である．このとき，$\{y_t\}$ は**線形過程**に従うという．定常な ARMA 過程は，明らかに線形過程の特殊ケースである．

線形過程の平均，自己共分散，コレログラム：

$$E(y_t) = \mu, \quad \gamma_h = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+|h|}, \quad \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h = \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \right)^2, \quad \rho_h = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \alpha_{j+|h|}}{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2}$$

２．標本平均 (Sample Mean)

線形過程 (1) からの観測値 $y_1, y_2, \cdots, y_T$ に対して，標本平均を

$$\bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} y_t$$

とおく．このとき，

$$\begin{aligned}
V(\bar{y}) &= V(\frac{1}{T}\sum y_t) = \frac{1}{T^2} E\left[\{\sum (y_t - \mu)\}^2 \right] \\
&= \frac{1}{T^2} E\left[\sum\sum (y_s - \mu)(y_t - \mu) \right] \\
&= \frac{1}{T^2} \sum_{s=1}^{T} \sum_{t=1}^{T} \gamma_{s-t} \\
&= \frac{1}{T} \sum_{j=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|j|}{T} \right) \gamma_j
\end{aligned}$$

定理１： 線形過程 (1) に対して，次のことが成立する．

$$\begin{aligned}
T\,V(\bar{y}) &= \sum_{j=-(T-1)}^{T-1} \left(1 - \frac{|j|}{T} \right) \gamma_j \\
\lim_{T\to\infty} T\,V(\bar{y}) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j = \sigma^2 \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \right)^2 \\
\sqrt{T}\,(\bar{y} - \mu) &\to \mathrm{N}\left(0, \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j \right)
\end{aligned}$$

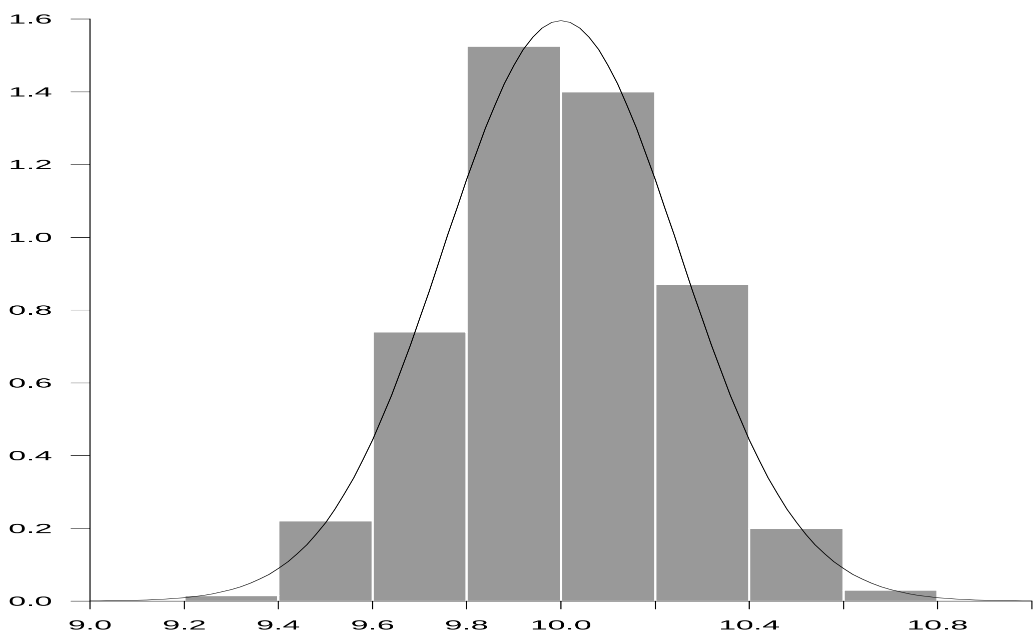
例１ AR(1) モデル：$\alpha_j = \phi_1^j$ より，

$$\sqrt{T}\,(\bar{y} - \mu) \to \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{(1-\phi_1)^2}\right)$$

例２ MA(1) モデル：$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -\theta_1$, $\alpha_j = 0$ $(j \geq 2)$ より，

$$\sqrt{T}\,(\bar{y} - \mu) \to \mathrm{N}\left(0, \sigma^2(1-\theta_1)^2\right)$$

$y_t = 4 + 0.6y_{t-1} + \varepsilon_t$ からの標本平均の分布 (T=100)



３．標本コレログラム (Sample Correlogram)

時差 h $(h \geq 0)$ の標本自己共分散を

$$\hat{\gamma}_h = \frac{1}{T}\sum_{t=h+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})$$

として，時差 h の標本コレログラムを

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{T}(y_t - \bar{y})(y_{t-h} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{T}(y_t - \bar{y})^2} = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0}$$

で定義する．

定理２： 線形過程 (1) に対して，次のことが成立する．

$$\lim_{T\to\infty} E(\hat{\gamma}_h) = \gamma_h, \qquad \lim_{T\to\infty} T\left[E(\hat{\gamma}_h - \gamma_h)\right] = -\sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_h \quad \text{(下方へのバイアス)}$$

さらに，$E(\varepsilon_t^4) = 3\sigma^4 + \kappa_4 < \infty$ とするとき（κ_4 は 4 次のキュムラントと呼ばれる．正規過程の場合は 0 となる），次のことが成立する．

$$\lim_{T\to\infty} T\,Cov(\hat{\gamma}_h, \hat{\gamma}_g) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\gamma_{j+h}\left(\gamma_{j+g} + \gamma_{j-g}\right)\right] + \frac{\kappa_4}{\sigma^4}\gamma_h\gamma_g$$

$$\sqrt{T}\,(\hat{\rho}_h - \rho_h) \to \mathrm{N}(0, w_h)$$

ここで，

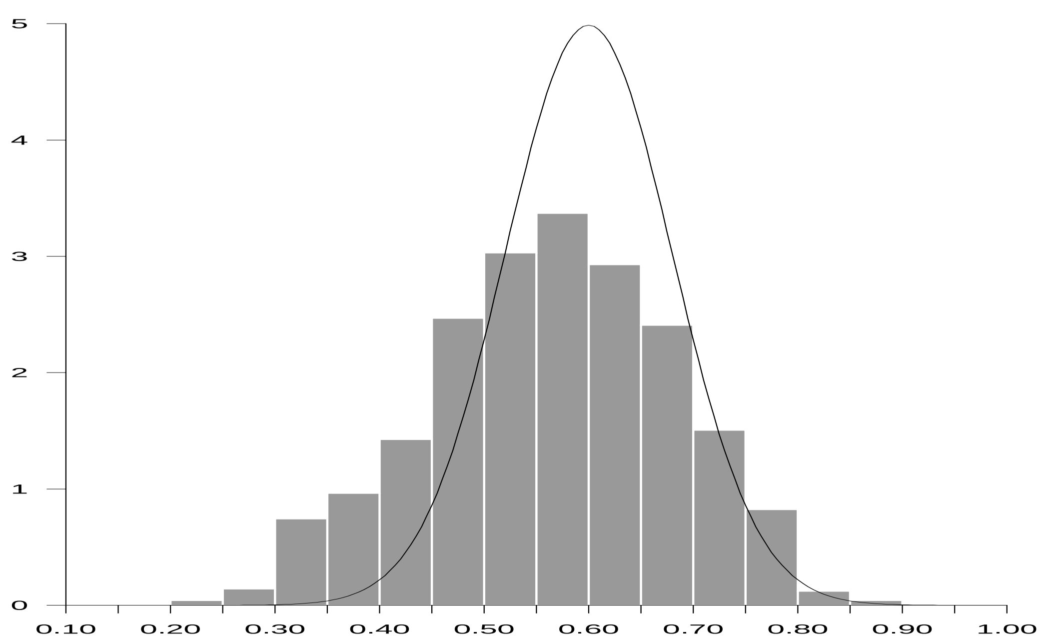
$$w_h = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{\rho_{j+h} + \rho_{j-h} - 2\rho_j\rho_h\right\}^2$$

例３ i.i.d. モデル：$w_h = 1$, $\hat{\rho}_h \sim \mathrm{N}(0, 1/T)$

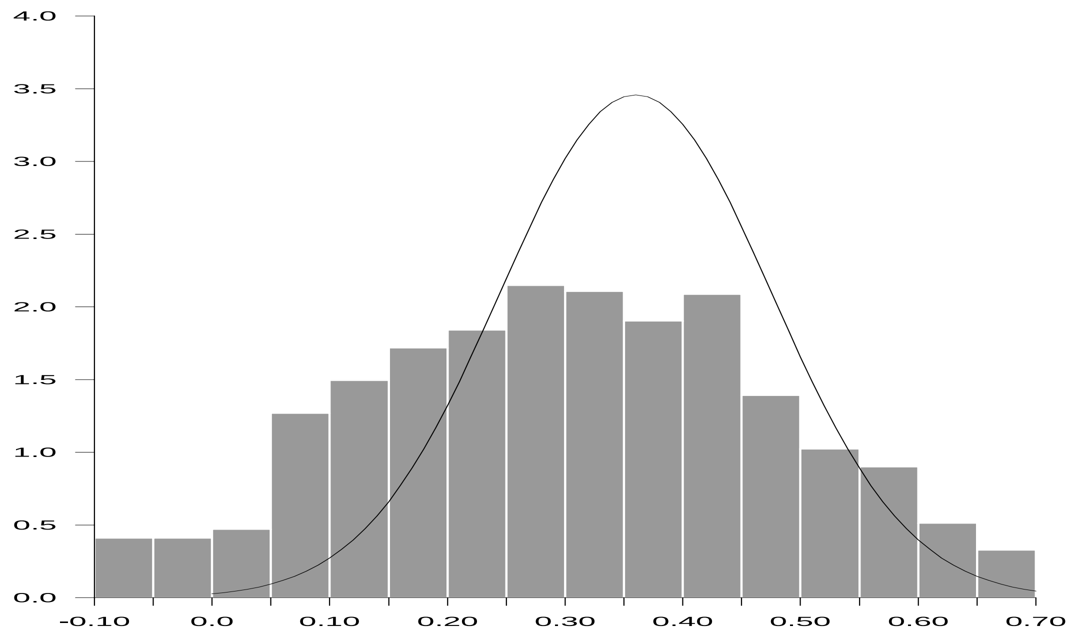
例４ AR(1) モデル：$w_h = (1-\phi_1^{2h})(1+\phi_1^2)/(1-\phi_1^2) - 2h\phi_1^{2h}$

例５ MA(1) モデル：$w_1 = 1 - 3\rho_1^2 + 4\rho_1^4$, $w_h = 1 + 2\rho_1^2$ $(h \geq 2)$

$y_t = 4 + 0.6 y_{t-1} + \varepsilon_t$ からの $\hat{\rho}_1$ の分布 (T=100)



$y_t = 4 + 0.6 y_{t-1} + \varepsilon_t$ からの $\hat{\rho}_2$ の分布 (T=100)



定理２から得られるコレログラムの 95% 信頼区間：

ρ_h に関する 95% 信頼区間は，ほぼ

$$\left[\hat{\rho}_h - 1.96 \times \sqrt{\frac{w_h}{T}}, \hat{\rho}_h + 1.96 \times \sqrt{\frac{w_h}{T}}\right]$$

特に，i.i.d. 過程あるいは無相関過程 ($\gamma_h = 0$, $h \neq 0$) ならば，

$$\left[-1.96 \times \sqrt{\frac{1}{T}}, 1.96 \times \sqrt{\frac{1}{T}}\right]$$

４．標本偏自己相関 (Sample Partial Autocorrelation)

時差 h の標本偏自己相関を $\hat{\phi}_{hh}$ とすると，$\hat{\phi}_{hh}$ は次の方程式から得られる．

$$\begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{h-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{h-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{h-1} & \hat{\rho}_{h-2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{h1} \\ \hat{\phi}_{h2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\phi}_{hh} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \hat{\rho}_h \end{pmatrix}$$

定理３： AR(p) モデルにおいては，次のことが成立する．

$$\hat{\phi}_{hh} \to \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{T}\right) \qquad h \geq p+1$$

したがって，ϕ_{hh} $(h \geq p+1)$ の 95% 信頼区間は

$$\left[-1.96 \times \frac{1}{\sqrt{T}}, 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{T}}\right]$$

５．標本逆自己相関 (Sample Inverse Autocorrelation)

時差 h の標本逆自己相関 $\hat{\rho i}_h$ は次のように求める．まず，AR(p) モデルを fit (p を大きく) して，係数推定量 $\hat{\phi}_1, \cdots, \hat{\phi}_p$ と分散推定量 $\hat{\gamma}_0$ を求める．そして，

$$\hat{\rho i}_h = \frac{1}{\hat{\gamma}_0}\left[-\hat{\phi}_h + \sum_{j=1}^{p-h} \hat{\phi}_j \hat{\phi}_{j+h}\right]$$

を計算する．ただし，$\hat{\rho i}_h = 0$ $(h > p)$ である．