

第 3 章「確率過程の分布収束」

この章では、 L_2 に属する確率過程に対して、分布の意味での収束を考える。通常、確率変数の分布収束では、例えば「中心極限定理」のように、有限次元の分布を考えれば十分である。しかし、連続時間確率過程の場合には、非可算次元を扱うことになる。したがって、「中心極限定理」についても、このような場合に適用できる形に拡張する必要がある。以下では、まず、そのための方法について説明した上で、確率過程から派生するさまざまな統計量の分布収束について議論する。

3.1 関数空間 $C[0, 1]$

前章に引き続き、 $\{X(t)\}$ を L_2 に属する確率過程とする。そして、以下では、煩雑さ为了避免のために、時点 t を $0 \leq t \leq 1$ に基準化しておく。さらに、ここでは、 $\{X(t)\}$ を制約して、関数空間 $C[0, 1]$ に属するものとする。 $C[0, 1]$ は、区間 $[0, 1]$ で定義された実数値連続関数の空間である。以後、簡単のため、 $C[0, 1]$ を単に C と表すことにする。

このような空間 C を対象として確率を議論するためには、 C から生成される Borel 集合族を構成する必要がある。そのために、**一様距離**

$$\rho(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)| \quad (x, y \in C) \quad (1)$$

を定義して、この距離に関して開集合となるような C の部分集合により生成される Borel 集合族を $B(C)$ とする。このとき、確率過程 $X = \{X(t)\}$ は、任意の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から C への連続な可測写像、すなわち、任意の $A \in B(C)$ に対して、 $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となるような写像であると考えられる。

なお、 $\{X(t)\}$ が属する空間としては、条件を緩めた場合の空間 $D[0, 1]$ (区間 $[0, 1]$ で定義され、右連続、左極限をもつような実数値連続関数の空間) を考えることが多い。空間 $D[0, 1]$ は、位相的な性質が複雑であるが、容易に構成できるので、以下でも、必要に応じて使うことになるであろう。

空間 C は、一様距離 ρ のもとで、**完備** (complete) であり、かつ**可分** (separable) である。ここで、完備であるとは、関数列 $\{x_n(t)\}$ が基本列ならば、すなわち、 $m, n \rightarrow \infty$ のとき、 $\rho(x_m, x_n) \rightarrow 0$ となるならば、必ず収束することをいう。他方、可分であるとは、稠密な可算集合が存在することをいう。例えば、 $\rho(X, Y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |X(t) - Y(t)|$ が確率変数となるためには、可分性の条件が必要である。この意味で、空間 C は要素が関数ではあるが、実数の集合と似ている。このように、空間 C は望ましい性質をもっており、確率過程の分布収束を議論するために都合のよい空間である。

さらに、空間 C が実数の空間と似ている性質としては、上記の他に、**コンパクト** (compact) でない点が挙げられる。コンパクトであるとは、任意の関数列が必ず収束する部分列を含むことをいう。空間 C がコンパクトでない理由としては、例えば、定数値関数列 $\{x_n(t)\} = \{n\}$ ($n = 1, 2, \dots$) を考えればよい。

次節では、空間 C 上での確率過程が分布収束することの定義と、そのための条件を述べる。

3.2 確率過程の弱収束

前節で述べたように、確率過程 $X = \{X(t)\}$ は、任意の確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から空間 C への可測写像である。そして、可測空間 $(C, B(C))$ において、次のようにして確率測度 Q を誘導することができる。

$$Q(A) = P(X \in A) = P(X^{-1}(A)) \quad (A \in B(C)) \quad (2)$$

C 上の確率過程の列 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ も、同様にして、確率測度の列 $\{Q_n\}$ を次のように誘導することができる。

$$Q_n(A) = P(X_n \in A) = P(X_n^{-1}(A)) \quad (A \in \mathcal{B}(C))$$

さて、確率過程の分布収束は、弱収束とも呼ばれ、次のように定義される。

• 確率過程の弱収束の定義

C 上の任意の有界連続実数値関数 f に対して、次のことが成り立つとする。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(X_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_C f(x) Q_n(dx) = E(f(X)) = \int_C f(x) Q(dx)$$

このとき、確率過程の列 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ は $X = \{X(t)\}$ に**弱収束**するといい、 $X_n \Rightarrow X$ と表す。

空間 C 上における確率過程の弱収束においては、通常の変数やベクトルの場合とは異なる複雑さが生じる。すなわち、有限個の時点 $0 \leq t_1 < \cdots < t_k \leq 1$ における分布収束

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \Rightarrow (X(t_1), \dots, X(t_k))$$

が成立しても、それは、確率過程の弱収束を保証するものではないという点である。

さらにまた、確率過程の弱収束を考える際には、分布関数からなる空間が必ずしもコンパクトでないことが問題となる。例えば、

$$F_n(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq n \text{ のとき}) \\ 0 & (x < n \text{ のとき}) \end{cases}$$

となるような分布関数列 $\{F_n(x)\}$ を考えれば、各 x に対して、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $F_n(x) \rightarrow G(x) \equiv 0$ に収束する。しかし、 $G(x)$ は分布関数ではない。

分布関数列の極限もまた分布関数となることを保証する条件は**緊密性** (tightness) と呼ばれ、次のように定義される。

• 緊密性の定義

確率過程の列 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ により誘導される確率測度の列 $\{Q_n\}$ が、任意の正数 ε に対して、 $Q_n(K) > 1 - \varepsilon$ となるようなコンパクト集合 K が各 n について存在するとき、 $\{Q_n\}$ は**緊密** (tight) である、あるいは、 $\{X_n\}$ は**緊密**であるという。

緊密性は、確率測度の列が、 $n \rightarrow \infty$ のとき、確率測度でなくなってしまうことを防ぐ条件であり、確率過程の動きがあまりにも急激に変わらないことを要請している。

C 上の確率過程の弱収束に関しては、次の定理が基本である。

定理 3.1 C 上の確率過程の列 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ に対して、次の 2 つの条件が成り立つものとする。

- i) 任意の自然数 k と時点 $t_1 < \cdots < t_k$ に対して、 $X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)$ の有限次元分布が $X(t_1), \dots, X(t_k)$ に分布収束する。
- ii) $\{X_n\}$ が緊密である。

このとき, $X_n \Rightarrow X$ となる.

確率過程の列の緊密性を, その定義から検証することは困難である. 次の定理は, そのための十分条件を与えるものである. 証明は, Billingsley (1968, p.55), Hall-Heyde (1980, p.275) などを参照されたい.

定理 3.2 C 上の確率過程の列 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ が緊密となるための必要十分条件は, 次の 2 つの条件が成り立つことである.

i) 初期値の列 $\{X_n(0)\}$ について, 次の収束が n に関して一様に成り立つ.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} P(|X_n(0)| > a) = 0$$

ii) 任意の正数 ε に対して, 次の収束が n に関して一様に成り立つ.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} P \left(\sup_{|s-t| < \delta} |X_n(s) - X_n(t)| > \varepsilon \right) = 0$$

上の定理において, 条件 i) は, $\{X_n(0)\}$ の分布の緊密性に他ならない. 他方, 条件 ii) における $\sup_{|s-t| < \delta} |X_n(s) - X_n(t)|$ は, $\{X_n\}$ の**連続率** (modulus of continuity) と呼ばれるが, 条件の意味するところは, 連続率の裾確率が一様に 0 に行くということである.

緊密性が成り立つための十分条件としては, 次のモーメント条件が与えられている (Billingsley (1968, p. 95)).

定理 3.3 C 上の確率過程の列 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ が次の 2 つの条件をみたすならば緊密である.

i) $E(|X_n(0)|)$ が一様に有界である.

ii) 非負の定数 γ と 1 より大きい定数 α , および, 非減少連続関数 $F(t)$ が存在して,

$$E(|X_n(s) - X_n(t)|^\gamma) \leq |F(s) - F(t)|^\alpha$$

が, すべての s, t ($0 \leq s, t \leq 1$) と n に対して成り立つ.

確率過程の弱収束の一般論の詳細については, Billingsley (1968), Hall-Heyde (1980), Shiryaev (1984) などを参照されたい. 次節では, 関数空間 C 上での中心極限定理について述べる.

3.3 汎関数中心極限定理 (FCLT)

本節では, 前節に引き続き, C 上の確率過程の列を考えるが, ここでは, 特別な列を取り上げる. そのために, まず, ランダム・ウォーク

$$S_j = S_{j-1} + \varepsilon_j = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j, \quad S_0 = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \quad (3)$$

を定義する. ここで, $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ ($\sigma^2 > 0$) である. このとき, 区間 $[0, 1]$ の部分区間 $[(j-1)/n, j/n]$ ($j = 1, \dots, n$) 内の時点 t において, 次のように定義される確率過程を考える.

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} S_j + n \left(t - \frac{j}{n} \right) \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \varepsilon_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{i=1}^{[nt]} \varepsilon_i + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \varepsilon_{[nt]+1} \quad \left(\frac{j-1}{n} \leq t \leq \frac{j}{n} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、初期値 $X_n(0)$ と終期値 $X_n(1)$ は、次のように定義する。

$$X_n(0) = 0, \quad X_n(1) = \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} S_n \quad (5)$$

このようにして定義された $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ は、区間 $[0, 1]$ の n 等分点における値を直線で結んで得られる連続な確率過程であり、 C 上の確率過程となることは明らかである。以下、この確率過程を**部分和過程**と呼ぶ。

次の定理は、部分和過程の弱収束に関する定理である。それは、部分和過程 $\{X_n\}$ が区間 $[0, 1]$ 上の Bm (標準 Brown 運動) に弱収束するという事実であり、**汎関数中心極限定理** (Functional Central Limit Theorem) と呼ばれる。あるいは、元の確率過程の分布とは関係なく、極限が正規過程となるということから、**不変性原理** (Invariance Principle) と呼ばれる。以下では、汎関数中心極限定理を、略して FCLT と呼ぶことにする (不変性原理は IP と呼ぶ)。特に、この FCLT は、最初に証明した Donsker (1951) に因んで、Donsker の定理と呼ばれる。証明は、定理 3.1 に従って、まず、有限次元分布が正規分布に収束することを、通常の中心極限定理で示し、次に、 $\{X_n\}$ の緊密性を示せばよい (問題 1)。詳細は、Billingsley (1968, p.68) を参照されたい。

定理 3.4 (Donsker の定理) 式 (4) で定義される部分和過程 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $[0, 1]$ 上の Bm $W = \{W(t)\}$ に弱収束する。すなわち、

$$X_n \Rightarrow W \quad (n \rightarrow \infty) \quad (6)$$

FCLT の別の例として、式 (4) の部分和過程を若干変形した次の確率過程を考えよう。

$$\begin{aligned} \bar{X}_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{i=1}^{[nt]} (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) + (nt - [nt]) \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} (\varepsilon_{[nt]+1} - \bar{\varepsilon}) \\ &= X_n(t) - tX_n(1) \quad \left(\frac{j-1}{n} \leq t \leq \frac{j}{n} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\bar{\varepsilon} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j / n = S_n / n$ である。このとき、定理 3.4 と同様にして、次の結果を得る。

定理 3.5 式 (7) で定義される確率過程 $\{\bar{X}_n\} = \{\bar{X}_n(t)\}$ は、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $[0, 1]$ 上の Bb (Brown 橋) $\bar{W} = \{\bar{W}(t)\} = \{W(t) - tW(1)\}$ に弱収束する。すなわち、

$$\bar{X}_n \Rightarrow \bar{W} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (8)$$

これらの定理は、誤差項 $\{\varepsilon_j\}$ が i.i.d. のもとで得られた FCLT であるが、その後、この仮定を緩めることにより、さまざまな形で拡張されてきた。確率論の分野では、漸近的な独立性を保証するための**ミキシング条件**が仮定されることが多い (例えば、Billingsley (1968), McLeish (1977))。他方、時系列解析においては、時系列モデルに基づく分析の観点から、i.i.d. を定常な線形過程に拡張することが普通である。その場合、ミキシング条件と線形過程の定常性は、必ずしも両立しない (Withers (1981), Athreya-Pantula (1986)) ので、本書では、後者への拡張に焦点を絞って考察することとしたい。

式 (4) や (7) で定義した部分和過程は、弱収束を議論する際の最も基本となる確率過程である。しかし、この他にも、別の形で部分和過程を定義して、その弱収束を考察したい場合がある。その際、これらの連続関数として定義されるような確率過程ならば、その弱収束については、導出が非常に容易になる。次節では、そのための定理を与え、実際例を考える。

3.4 連続写像定理 (CMT)

関数空間 C 上の確率過程の弱収束を導出するために、次の定理は非常に有用である。

定理 3.6 C 上で定義された関数 $h(x)$ が一様距離 (1) に関して連続とする。このとき、 C 上の確率過程 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ が $X = \{X(t)\}$ に弱収束するならば、 $\{h(X_n)\}$ は $h(X)$ に弱収束する。

この定理は、 X_n が確率変数ならば、よく知られていることである。ここでは、関数空間上の確率過程に拡張されたもので、**連続写像定理** (CMT: Continuous Mapping Theorem) と呼ばれる。証明は、Billingsley (1968, p. 29) を参照されたい。なお、連続関数 $h(x)$ は、値がベクトルとなってもよいことに注意されたい。次は、 C 上の連続関数として、よく使われる例である (問題 3)。

$$h_1(x) = \int_0^1 x(t) dt, \quad h_2(x) = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad h_3(x) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| \quad (9)$$

したがって、 $X_n \Rightarrow W$ ならば、例えば、次の弱収束が成り立つ。

$$\int_0^1 X_n(t) dt \Rightarrow \int_0^1 W(t) dt, \quad \sup_{0 \leq t \leq 1} |X_n(t)| \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t)|$$

CMT は、写像 h の連続性を仮定するが、もう少しゆるめた形でも、次のように成り立つ (Billingsley (1968, p.31))。

定理 3.7 C 上の可測関数 $h(x)$ の不連続集合を D_h とする。このとき、 C 上の確率過程 $\{X_n\} = \{X_n(t)\}$ が $X = \{X(t)\}$ に弱収束し、かつ、 $P(X \in D_h) = 0$ となるならば、 $\{h(X_n)\}$ は $h(X)$ に弱収束する。

このような関数 h の例としては、 $\{W(t)\}$ を Bm として、 $h(W) = 1 / \int_0^1 W^2(t) dt$ を挙げることができる。なぜなら、この場合、 $D_h = \{W : \int_0^1 W^2(t) dt = 0\}$ であるが、 $P(W \in D_h) = P(W(t) = 0, 0 \leq t \leq 1) = 0$ となるからである。したがって、 $X_n \Rightarrow W$ ならば、次のことが成り立つ。

$$\frac{1}{\int_0^1 X_n^2(t) dt} \Rightarrow \frac{1}{\int_0^1 W^2(t) dt}$$

弱収束を議論するためには、CMT の他に、定数に確率収束することの議論が必要になる場合がある。まず、 C 上の確率過程 $\{Y_n(t)\}$ が定数 a に確率収束することの定義を与えよう。

• 確率過程の確率収束の定義

C 上の確率過程 $\{Y_n(t)\}$ が定数 a に確率収束するとは、任意の正数 ε に対して、

$$P(\rho(Y_n, a) > \varepsilon) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |Y_n(t) - a| > \varepsilon\right) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることである。すなわち、 $\rho(Y_n, a)$ が 0 に確率収束することである。

次の 2 つの定理は、確率収束に関連したものであり、弱収束を考える際にも有用である。

定理 3.8 C 上で定義された関数 $h(x)$ が一様距離 (1) に関して連続とする。このとき、 C 上の確率過程 $\{Y_n\} = \{Y_n(t)\}$ が定数 a に確率収束するならば、 $\{h(Y_n)\}$ は $h(a)$ に確率収束する。

定理 3.9 C 上の確率過程 $\{Y_n\} = \{Y_n(t)\}$ と $\{Z_n\} = \{Z_n(t)\}$ に対して, $\{Y_n\}$ が $Y = \{Y(t)\}$ に弱収束し, $\rho(Y_n, Z_n)$ が 0 に確率収束するならば, $\{Z_n\}$ も Y に弱収束する.

これら 2 つの定理は, 確率変数の場合には, よく知られているものである.

以上の定理を使って, 次の確率過程の弱収束を考えよう.

$$\tilde{X}_n(t) = X_n(t) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_n(j/n) \quad (10)$$

ここで, $\{X_n(t)\}$ は, 式 (4) で定義された部分和過程である. したがって, $X_n \Rightarrow W$ が成り立っている. このとき,

$$\tilde{X}_n(t) = Y_n(t) + R_n(t)$$

と変形しよう. ただし,

$$Y_n(t) = X_n(t) - \int_0^1 X_n(t) dt, \quad R_n(t) = \int_0^1 X_n(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_n(j/n)$$

である. まず, CMT より, $Y_n \Rightarrow W - \int_0^1 W(s) ds$ が成り立つ. 他方,

$$R_n(t) = \tilde{X}_n(t) - Y_n(t) = \sum_{j=1}^n \int_{(j-1)/n}^{j/n} (X_n(t) - X_n(j/n)) dt$$

は, 0 に確率収束することが示される. したがって, 定理 3.9 より, $\tilde{X}_n$ も Y_n と同一の確率過程に弱収束する. すなわち,

$$\tilde{X}_n \Rightarrow W - \int_0^1 W(s) ds$$

となる. 収束先は, 平均調整済み Bm である.

以上の準備のもとで, 非定常時系列から得られるさまざまな統計量の弱収束の例を考えよう. そのために AR(1) モデル

$$y_j = \rho y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad y_0 = 0 \quad (j = 1, \dots, T) \quad (11)$$

を取り上げよう. ここで, ρ の真値は 1, $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ である. したがって, $\{y_j\}$ は, 係数 1 の AR(1), すなわち, ランダム・ウォークである.

なお, 以下の説明では, 式 (4) の部分和過程 $\{X_n(t)\}$ の添え字 n を T に代えて,

$$X_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \sum_{i=1}^j \varepsilon_i + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \varepsilon_j \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right)$$

と表すことにする.

(例 3.1) まず, 次の標本 2 次モーメントを考えよう.

$$S_{1T} = \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T X_T^2(j/T) = h_1(X_T) + R_{1T} \quad (12)$$

ここで,

$$\begin{aligned} h_1(X_T) &= \int_0^1 X_T^2(t) dt \\ R_{1T} &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T X_T^2(j/T) - \int_0^1 X_T^2(t) dt = \sum_{j=1}^T \int_{(j-1)/T}^{j/T} [X_T^2(j/T) - X_T^2(t)] dt \end{aligned}$$

である. このとき, CMT より, $h_1(X_T/\sigma) \Rightarrow h_1(W)$ である. 他方, R_{1T} については,

$$\begin{aligned} |R_{1T}| &\leq \sum_{j=1}^T \int_{(j-1)/T}^{j/T} |X_T^2(j/T) - X_T^2(t)| dt \\ &= \sum_{j=1}^T \int_{(j-1)/T}^{j/T} |(X_T(j/T) + X_T(t))(X_T(j/T) - X_T(t))| dt \\ &\leq 2 \sup_{0 \leq t \leq 1} |X_T(t)| \max_{1 \leq j \leq T} \frac{|\varepsilon_j|}{\sqrt{T}} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで, 次のことを示すことができる.

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |X_T(t)| \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} |W(t)|, \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq T} \frac{|\varepsilon_j|}{\sqrt{T}} = 0$$

前者は CMT による. 後者は, 任意の正数 δ に対して,

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1 \leq j \leq T} \frac{|\varepsilon_j|}{\sqrt{T}} > \delta\right) &= 1 - \prod_{j=1}^T P\left(\frac{|\varepsilon_j|}{\sqrt{T}} \leq \delta\right) = 1 - \left(1 - P\left(\frac{|\varepsilon_1|}{\sqrt{T}} > \delta\right)\right)^T \\ &\leq 1 - \left[1 - \frac{1}{T\delta^2} E\left\{\varepsilon_1^2 I\left(\frac{|\varepsilon_1|}{\sqrt{T}} > \delta\right)\right\}\right]^T \rightarrow 0 \end{aligned}$$

となることによる. ただし, $I(A)$ は, 集合 A の定義関数である. 以上より,

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left[\sup_{0 \leq t \leq 1} |X_T(t)| \max_{1 \leq j \leq T} \frac{|\varepsilon_j|}{\sqrt{T}} \right] = 0 \quad (13)$$

となることが示される (問題 4). したがって, 次の弱収束が成り立つ.

$$S_{1T} = \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 \Rightarrow \int_0^1 W^2(t) dt \quad (14)$$

(例 3.2) ここでは, 平均修正された標本 2 次モーメント

$$S_{2T} = \frac{1}{T^2 \sigma^2} \sum_{j=1}^T (y_j - \bar{y})^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T y_j$$

を考えよう. この場合にも, (例 3.1) と同様にして, 次の分布収束を得る (問題 5).

$$S_{2T} \Rightarrow \int_0^1 \left\{ W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right\}^2 dt$$

(例 3.3) モデル (11) から得られる次の統計量

$$S_{3T} = T(\hat{\rho} - 1), \quad \hat{\rho} = \sum_{j=2}^T y_{j-1}y_j / \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2$$

を考えよう．ここで， $\hat{\rho}$ は，AR(1) モデルの係数 ρ の LSE とみなすことができる．ただし， ρ の真値は 1 である．この場合の S_{3T} は，

$$S_{3T} = \frac{1}{T\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}(y_j - y_{j-1}) / \left[\frac{1}{T^2\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 \right] = \frac{U_T}{V_T}$$

と表すことができる．ただし，

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{T\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}(y_j - y_{j-1}) = -\frac{1}{2T\sigma^2} \left[\sum_{j=2}^T (y_j - y_{j-1})^2 - \sum_{j=2}^T y_j^2 + \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 \right] \\ &= -\frac{1}{2T\sigma^2} \left[\sum_{j=2}^T \varepsilon_j^2 - y_T^2 + y_1^2 \right] = \frac{1}{2} X_T^2(1) - \frac{1}{2T\sigma^2} \sum_{j=1}^T \varepsilon_j^2 \\ V_T &= \frac{1}{T^2\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T X_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - \frac{1}{T^2\sigma^2} y_T^2 \end{aligned}$$

である． C 上の関数

$$h_1(x) = \frac{1}{2} (x^2(1) - 1), \quad h_2(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$$

を定義して， $h_3(x) = h_1(x)/h_2(x)$ とおく．ここで， $h_3(W)$ が不連続となる集合を $D(h_3)$ とすると，それは， $h_2(W) = 0$ ，すなわち， $W(t) = 0$ ($0 \leq t \leq 1$) となる集合であり， $P(W \in D(h_3)) = 0$ となる．

以上より，

$$U_T = h_1(X_T) + o_p(1), \quad V_T = h_2(X_T) + o_p(1)$$

と表すことができるので，FCLT と CMT により，次の結果を得る．

$$\begin{aligned} S_{3T} &= T(\hat{\rho} - 1) = \frac{h_1(X_T) + o_p(1)}{h_2(X_T) + o_p(1)} = h_3(X_T) + o_p(1) \\ \Rightarrow h_3(W) &= \frac{(W^2(1) - 1)/2}{\int_0^1 W^2(t) dt} = \frac{\int_0^1 W(t) dW(t)}{\int_0^1 W^2(t) dt} \end{aligned} \quad (15)$$

3.5 線形過程における FCLT

本章 3 節で述べたように，FCLT は部分和過程を生成する誤差項に関する条件を緩めることにより，より広いクラスの確率過程に適用が可能となる．ここでは，誤差項が定常な線形過程に従う場合の部分和過程の分布収束について考えよう．

まず，第 1 章で述べた次の線形過程 $\{u_j\}$ を再度取り上げよう．

$$u_j = \alpha(L) \varepsilon_j = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \varepsilon_{j-l}, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha(1) \neq 0, \quad \sum_{l=1}^{\infty} l |\alpha_l| < \infty \quad (16)$$

ここで、 $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ である。また、 $\alpha(1) \neq 0$ は、特性方程式 $\alpha(x) = 0$ が単位根をもたない条件であり、以下で議論する FCLT が成り立つために必要である。線形過程 $\{u_j\}$ に基づいて、部分和過程

$$Y_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \sum_{i=1}^j u_i + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} u_j \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right) \quad (17)$$

を定義する。ここで、 u_i に対して、第 1 章 4 節で説明した B-N 分解を使って、次の変換を考える。

$$u_i = \alpha(1) \varepsilon_i + \tilde{\varepsilon}_{i-1} - \tilde{\varepsilon}_i, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_l \varepsilon_{i-l}, \quad \tilde{\alpha}_l = \sum_{k=l+1}^{\infty} \alpha_k \quad (18)$$

式 (18) の u_i を (17) へ代入することにより、 $Y_T(t)$ は、

$$Y_T(t) = \alpha(1) X_T(t) + R_T(t), \quad (19)$$

と表すことができる。ここで、 $X_T(t)$ は、i.i.d. 系列から構成された部分和過程であり、式 (4) で定義されたものである。他方、 $R_T(t)$ は、

$$R_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} (\tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_j) + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} (\tilde{\varepsilon}_{j-1} - \tilde{\varepsilon}_j) \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right)$$

である。

以上より、式 (19) の $Y_T(t)$ の表現に着目すれば、FCLT と CMT により、 $\alpha(1) X_T \Rightarrow \alpha(1) W$ である。したがって、

$$\rho(Y_T, \alpha(1) X_T) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |R_T(t)| \leq \frac{4}{\sqrt{T}\sigma} \max_{0 \leq j \leq T} |\tilde{\varepsilon}_j|$$

の最右辺が 0 に確率収束すれば、 $Y_T \Rightarrow \alpha(1) W$ を得る。実際、次の同値関係が成り立つ。

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} \max_{0 \leq j \leq T} |\tilde{\varepsilon}_j| \right\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \sum_{j=0}^T \tilde{\varepsilon}_j^2 I(\tilde{\varepsilon}_j^2 > T\delta) \right\} = 0 \quad (20)$$

ここで、 δ は任意の正数である。式 (20) の右側の確率収束は、 $\{\tilde{\varepsilon}_j\}$ の定常性と Markov の不等式から証明される（問題 4）。以上から、次の定理を得る。

定理 3.10 式 (16) の線形過程 $\{u_j\}$ から構成され、式 (17) で定義される部分和過程 $\{Y_T(t)\}$ に対して、 $Y_T \Rightarrow \alpha(1) W$ なる FCLT が成り立つ。

この定理の応用として、次のモデルを取り上げよう。

$$y_j = \rho y_{j-1} + u_j, \quad y_0 = 0, \quad u_j = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \varepsilon_{j-l}, \quad (j = 1, \dots, T) \quad (21)$$

ここで、 ρ の真値は 1 であり、線形過程に従う誤差項 $\{u_j\}$ は、式 (16) に与えられた条件をみたすものとする。このモデルは、**一般化ランダム・ウォーク**、あるいは、**I(1) モデル**と呼ばれる。I は、integrated（和分された）の頭文字であり、カッコ内の 1 は和分の次数を表す。

(例 3.4) モデル (21) から得られる次の統計量の分布収束を考えよう.

$$S_{4T} = \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T y_j^2$$

式 (17) で定義された部分和過程 $\{Y_T(t)\}$ を使うことにより,

$$\begin{aligned} S_{4T} &= \frac{\sigma^2}{T} \sum_{j=1}^T Y_T^2\left(\frac{j}{T}\right) = \sigma^2 \left[\int_0^1 Y_T^2(t) dt + \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T Y_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - \int_0^1 Y_T^2(t) dt \right] \\ &= \sigma^2 [h_4(Y_T) + R_{4T}] \end{aligned}$$

と表すことができる. ここで,

$$h_4(y) = \int_0^1 y^2(t) dt, \quad y \in C$$

は, C 上の連続関数である. 定理 3.10 により, $Y_T \Rightarrow \alpha(1)W$ であり, CMT により, $h_4(Y_T) \Rightarrow h_4(\alpha(1)W) = \alpha^2(1)h_4(W)$ を得る. 他方,

$$R_{4T} = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T Y_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - \int_0^1 Y_T^2(t) dt = \sum_{j=1}^T \int_{(j-1)/T}^{j/T} \left[Y_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - Y_T^2(t) \right] dt$$

であり, これは 0 に確率収束することが示される (問題 6). 以上から, S_{4T} に関して, 次の分布収束を得る.

$$S_{4T} = \sigma^2 [h_4(Y_T) + R_{4T}] \Rightarrow \sigma^2 \alpha^2(1) h_4(W) = \sigma^2 \alpha^2(1) \int_0^1 W^2(t) dt$$

(例 3.5) モデル (21) から得られる次の統計量を考えよう.

$$S_{5T} = T(\hat{\rho} - 1), \quad \hat{\rho} = \sum_{j=2}^T y_{j-1}y_j / \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2$$

まず, 次の量 U_T と V_T を定義する.

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{T\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}(y_j - y_{j-1}) = \frac{1}{2} Y_T^2(1) - \frac{1}{2T\sigma^2} \sum_{j=1}^T u_j^2 \\ V_T &= \frac{1}{T^2\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T Y_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - \frac{1}{T^2\sigma^2} y_T^2 \end{aligned}$$

このとき, $S_{5T} = U_T/V_T$ と表すことができる. さらに, C 上の関数

$$h_{51}(x) = \frac{1}{2} \left(x^2(1) - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 \right), \quad h_{52}(x) = \int_0^1 x^2(t) dt$$

を定義して, $h_5(x) = h_{51}(x)/h_{52}(x)$ とおく. $h_5(W)$ が不連続となる集合を $D(h_5)$ とすると, それは, $h_{52}(W) = 0$ となる集合であり, $P(W \in D(h_5)) = 0$ であることから, $h_5(Y_T) \Rightarrow h_5(\alpha(1)W)$ となる. ところで,

$$U_T = h_{51}(Y_T) + o_p(1), \quad V_T = h_{52}(Y_T) + o_p(1)$$

と表すことができるので、FCLT と CMT により、次の結果を得る。

$$\begin{aligned} S_{5T} &= T(\hat{\rho} - 1) = \frac{h_{51}(Y_T) + o_p(1)}{h_{52}(Y_T) + o_p(1)} = h_5(Y_T) + o_p(1) \\ \Rightarrow h_5(\alpha(1)W) &= \frac{(\alpha^2(1)W^2(1) - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2)/2}{\alpha^2(1) \int_0^1 W^2(t) dt} \end{aligned} \quad (22)$$

$$= \frac{(W^2(1) - \lambda)/2}{\int_0^1 W^2(t) dt} = \frac{\int_0^1 W(t) dW(t) + (1 - \lambda)/2}{\int_0^1 W^2(t) dt} \quad (23)$$

ここで、 λ は、 $\{u_j\}$ の短期分散と長期分散（第 1 章 4 節を参照）の比

$$\lambda = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2}{\alpha^2(1)} = \frac{1}{\sum_{h=-\infty}^{\infty} \rho(h)}$$

であり、 $\rho(h)$ は、 $\{u_j\}$ の時差 h の自己相関である。

3.6 O-U 過程への分布収束

次の AR(1) モデルを考えよう。

$$y_j = \rho_T y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad y_0 = 0, \quad \rho_T = 1 - \frac{c}{T} \quad (j = 1, \dots, T) \quad (24)$$

ここで、 $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ である。このモデルは、係数パラメータ $\rho_T = 1 - (c/T)$ が標本サイズ T に依存している点が、通常の AR(1) モデルと異なる。 c は非負の定数である。モデルは、 $T \rightarrow \infty$ のとき、 $\rho_T \rightarrow 1$ となり、ランダム・ウォークになる。この意味で、(24) のモデルは、**ランダム・ウォーク近接モデル** (near random walk model) と呼ばれる。

部分和 $S_j = \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_j$, ($S_0 = 0$) を定義すると、式 (24) は、

$$y_j = \sum_{i=1}^j \rho_T^{j-i} (S_i - S_{i-1}) = \rho_T^{-1} S_j - \frac{c}{T} \sum_{i=1}^j \rho_T^{j-i-1} S_i$$

と表すことができる（問題 7）。そこで、 $(j-1)/T \leq t \leq j/T$ において、

$$\begin{aligned} Z_T(t) &= \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} y_j + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{y_j - y_{j-1}}{\sqrt{T}\sigma} \\ &= \rho_T^{-1} X_T \left(\frac{j}{T} \right) - \frac{c}{T} \sum_{i=1}^j \rho_T^{j-i-1} X_T \left(\frac{i}{T} \right) + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{y_j - y_{j-1}}{\sqrt{T}\sigma} \end{aligned} \quad (25)$$

で定義される部分和過程 $\{Z_T(t)\}$ を考えよう。ここで、 $\{X_T(t)\}$ は、i.i.d. 系列から構成される部分和過程である。

$\{Z_T\}$ の分布収束を考えるために、 C 上の関数 $h(z)$ で、時点 t における値が、

$$h_t(z) = z(t) - ce^{-ct} \int_0^t e^{cs} z(s) ds$$

と表されるものを定義しよう。関数 h は連続関数であり、次の性質をもつことがわかる（問題 8）。

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |Z_T(t) - h_t(X_T)| = 0$$

したがって、FCLT と CMT から、 $h_t(X_T) \Rightarrow h_t(W)$ が成り立つ。ここで、

$$h_t(W) = W(t) - ce^{-ct} \int_0^t e^{cs} W(s) ds = e^{-ct} \int_0^t e^{cs} dW(s) = Z(t) \quad (26)$$

であり、これは O-U 過程である。

以上から、O-U 過程への分布収束に関する次の FCLT が成り立つ。

定理 3.11 式 (24) のランダム・ウォーク近接モデルに従う時系列 $\{y_j\}$ から構成され、(25) で定義される部分和過程 $\{Z_T(t)\}$ は、 $T \rightarrow \infty$ のとき、式 (26) の O-U 過程 $\{Z(t)\}$ に弱収束する。

(例 3.6) モデル (24) における ρ_T の LSE $\hat{\rho}_T = 1 - (\hat{c}/T)$ について考えよう。 $T(\hat{\rho}_T - 1) = -\hat{c} = U_T/V_T$ と表す。ただし、

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{T\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}(y_j - y_{j-1}) = -\frac{1}{2T\sigma^2} \left[\sum_{j=2}^T \left(\varepsilon_j - \frac{c}{T} y_{j-1} \right)^2 - y_T^2 + y_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} Z_T^2(1) - \frac{1}{2T\sigma^2} \sum_{j=1}^T \varepsilon_j^2 + o_p(1) \\ V_T &= \frac{1}{T^2\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T Z_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - \frac{1}{T^2\sigma^2} y_T^2 \end{aligned}$$

である。あとは、前と同様の議論により、次の結果が得られる。

$$T(\hat{\rho}_T - 1) = -\hat{c} \Rightarrow \frac{(Z^2(1) - 1)/2}{\int_0^1 Z^2(t) dt} = \frac{\int_0^1 Z(t) dZ(t)}{\int_0^1 Z^2(t) dt} \quad (27)$$

ここで、最後の等号は、Ito 積分の性質による。

式 (24) のランダム・ウォーク近接モデルは、誤差項が線形過程に従うモデル

$$y_j = \rho_T y_{j-1} + u_j, \quad u_j = \alpha(L)\varepsilon_j = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \varepsilon_{j-l}, \quad \rho_T = 1 - \frac{c}{T} \quad (j = 1, \dots, T) \quad (28)$$

に拡張される。ここで、 $y_0 = 0$ である。また、線形過程 $\{u_j\}$ は、式 (16) の条件をみたすものとする。このモデルは、**I(1) 近接モデル** (near I(1) model) と呼ばれる。

式 (28) の I(1) 近接モデルは、 $\tilde{S}_j = u_1 + \dots + u_j$ を定義することにより、

$$y_j = \sum_{i=1}^j \rho_T^{j-i} (\tilde{S}_i - \tilde{S}_{i-1}) = \rho_T^{-1} \tilde{S}_j - \frac{c}{T} \sum_{i=1}^j \rho_T^{j-i-1} \tilde{S}_i$$

と表すことができる。そこで、 $(j-1)/T \leq t \leq j/T$ において、

$$Q_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} y_j + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{y_j - y_{j-1}}{\sqrt{T}\sigma} \quad (29)$$

で定義される部分和過程 $\{Q_T(t)\}$ を考えると、B-N 分解を使うことにより、

$$Q_T(t) = \alpha(1) Z_T(t) + R_T(t)$$

と表すことができる．ここで、 $Z_T(t)$ は、式 (25) で定義された部分和過程である．また、 $R_T(t)$ は、B-N 分解から生じる剰余項であり、次のことが成り立つ．

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |R_T(t)| = 0$$

以上から、次の FCLT が成り立つことがわかる．

定理 3.12 式 (28) の I(1) 近接モデルに従う時系列 $\{y_j\}$ から構成され、(29) で定義される部分和過程 $\{Q_T(t)\}$ に対して、 $Q_T \Rightarrow \alpha(1)Z$ なる FCLT が成り立つ．ただし、 $Z = \{Z(t)\}$ は (26) で定義された O-U 過程である．

(例 3.7) モデル (28) における ρ_T の LSE $\hat{\rho}_T = 1 - (\hat{c}/T)$ について考えよう． $T(\hat{\rho}_T - 1) = -\hat{c} = U_T/V_T$ と表すと、

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{T\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}(y_j - y_{j-1}) = -\frac{1}{2T\sigma^2} \left[\sum_{j=2}^T \left(u_j - \frac{c}{T} y_{j-1} \right)^2 - y_T^2 + y_1^2 \right] \\ &= \frac{\alpha^2(1)}{2} Z_T^2(1) - \frac{1}{2T\sigma^2} \sum_{j=1}^T u_j^2 + o_p(1) \\ V_T &= \frac{1}{T^2\sigma^2} \sum_{j=2}^T y_{j-1}^2 = \frac{\alpha^2(1)}{T} \sum_{j=1}^T Z_T^2\left(\frac{j}{T}\right) + o_p(1) \end{aligned}$$

このことから、次の結果が得られる．

$$T(\hat{\rho}_T - 1) = -\hat{c} \Rightarrow \frac{(Z^2(1) - \lambda)/2}{\int_0^1 Z^2(t) dt} = \frac{\int_0^1 Z(t) dZ(t) + (1 - \lambda)/2}{\int_0^1 Z^2(t) dt} \quad (30)$$

ここで、 $\{Z(t)\}$ は、O-U 過程である．また、 λ は $\{u_j\}$ の短期分散 $V(u_j)$ と長期分散 $\alpha^2(1)\sigma^2$ の比であり、 $\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 / \alpha^2(1)$ で定義される．

3.7 積分 Brown 運動への分布収束

まず、次の特殊な I(d) モデルを考えよう．

$$(1 - L)^d x_j^{(d)} = \varepsilon_j, \quad x_0^{(d)} = x_{-1}^{(d)} = \dots = x_{-d+1}^{(d)} = 0, \quad \{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2) \quad (31)$$

一般の I(d) モデルでは、 d 回の階差変換後の系列が線形過程に従うが、ここでは、i.i.d. を仮定している．このモデルは、 **d 重単位根モデル**と呼ばれる．

上の時系列 $\{x_j^{(d)}\}$ に基づいて、部分和過程 $\{X_T^{(d)}(t)\}$ を、次のように定義する．

$$\begin{aligned} X_T^{(d)}(t) &= \frac{x_j^{(d)}}{T^{d-1/2}\sigma} + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{x_j^{(d)} - x_{j-1}^{(d)}}{T^{d-1/2}\sigma} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^j X_T^{(d-1)}\left(\frac{i}{T}\right) + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{x_j^{(d-1)}}{T^{d-1/2}\sigma} \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、

$$X_T^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \sum_{i=1}^j \varepsilon_i + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{\varepsilon_j}{\sqrt{T}\sigma} \quad (33)$$

である．

$\{X_T^{(d)}(t)\}$ の分布収束を述べるために、第 2 章 2 節で定義した k 重積分 Brown 運動

$$F_k(t) = \int_0^t F_{k-1}(s) ds, \quad F_0(s) = W(s) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (34)$$

を考える． $\{W(s)\}$ は Bm (標準 Brown 運動) である．なお、 $F_k(t)$ は、Riemann-Stieltjes 積分により、

$$F_k(t) = \frac{1}{k!} \int_0^t (t-s)^k dW(s) \quad (35)$$

と表されることに留意されたい．

このとき、次の定理が成り立つ（証明は、Chan-Wei (1988), Tanaka (1996) を参照）．

定理 3.13 式 (31) の d 重単位根モデルに従う時系列 $\{x_j^{(d)}\}$ から構成され、(32) で定義される部分和過程 $\{X_T^{(d)}(t)\}$ に対して、 $X_T^{(d)} \Rightarrow F_{d-1}$ なる FCLT が成り立つ． $\{F_k(t)\}$ は、 k 重積分 Brown 運動である．

(例 3.8) $d \geq 2$ として、式 (31) の d 重単位根モデルから得られる次の統計量の分布収束について考えよう．

$$\hat{\rho}^{(d)} = \sum_{j=2}^T x_{j-1}^{(d)} x_j^{(d)} \bigg/ \sum_{j=2}^T \left(x_{j-1}^{(d)}\right)^2 \quad (36)$$

統計量 $\hat{\rho}^{(d)}$ は、次のモデル

$$x_j^{(d)} = \rho x_{j-1}^{(d)} + x_j^{(d-1)}, \quad (1-L)^{d-1} x_j^{(d-1)} = \varepsilon_j$$

における ρ の LSE とみなすことができる．ただし、係数 ρ の真値は 1 である．また、誤差項 $x_j^{(d-1)}$ は、 $d-1$ 重単位根系列となっている．このとき、 $T(\hat{\rho}^{(d)} - 1) = U_T/V_T$ と表すことができる．ただし、

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{1}{T^{2d-1}\sigma^2} \sum_{j=2}^T x_{j-1}^{(d)} (x_j^{(d)} - x_{j-1}^{(d)}) \\ &= -\frac{1}{2T^{2d-1}\sigma^2} \left[\sum_{j=2}^T \left(x_j^{(d-1)}\right)^2 - \left(x_T^{(d)}\right)^2 + \left(x_1^{(d)}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(X_T^{(d)}(1)\right)^2 + o_p(1) \\ V_T &= \frac{1}{T^{2d}\sigma^2} \sum_{j=2}^T \left(x_{j-1}^{(d)}\right)^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left(X_T^{(d)}\left(\frac{j}{T}\right)\right)^2 - \frac{1}{T^{2d}\sigma^2} \left(x_T^{(d)}\right)^2 \end{aligned}$$

である．ここでは $d \geq 2$ と仮定しているが、 $d = 1$ の場合との違いは、 U_T の表現において、

$$\frac{1}{T^{2d-1}} \sum_{j=2}^T \left(x_j^{(d-1)}\right)^2 = o_p(1) \quad (d \geq 2)$$

となることである．実際、 $d \geq 2$ ならば、 $x_T^{(d-1)} = O_p(T^{d-3/2})$ 、 $\left(x_T^{(d-1)}\right)^2 = O_p(T^{2d-3})$ となることから、上の左辺は $O_p(T^{-1})$ となる．他方、 $d = 1$ の場合には、上の左辺は、 $T^{2d-1} = T$ 、 $x_j^{(0)} = \varepsilon_j$ となることから、 $O_p(1)$ となる．

以上から、 $T(\hat{\rho}^{(d)} - 1)$ の分布収束に関して、次の結果を得る。

$$T(\hat{\rho}^{(d)} - 1) \Rightarrow \frac{F_{d-1}^2(1)/2}{\int_0^1 F_{d-1}^2(t) dt} = \frac{\int_0^1 F_{d-1}(t) dF_{d-1}(t)}{\int_0^1 F_{d-1}^2(t) dt} \quad (d \geq 2) \quad (37)$$

$\{F_k(t)\}$ ($k \geq 1$) は微分可能であるから、上の表現の最右辺の分子の積分は、伊藤積分ではないことに注意されたい。この結果から、 $d = 1$ は、むしろ例外的な場合となることが了解されよう。

今までの議論は、次の一般的な $I(d)$ モデルに拡張することができる。

$$(1 - L)^d y_j^{(d)} = u_j, \quad y_0^{(d)} = y_{-1}^{(d)} = \cdots = y_{-d+1}^{(d)} = 0, \quad u_j = \alpha(L)\varepsilon_j = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \varepsilon_{j-l} \quad (38)$$

ここで、線形過程に従う誤差項 $\{u_j\}$ は、式 (16) に与えられた条件をみたすものとする。

$I(d)$ 過程に従う時系列 $\{y_j^{(d)}\}$ から、次の部分和過程を構成しよう。

$$\begin{aligned} Y_T^{(d)}(t) &= \frac{y_{[Tt]}^{(d)}}{T^{d-1/2}\sigma} + (Tt - [Tt]) \frac{y_{[Tt]+1}^{(d-1)}}{T^{d-1/2}\sigma} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^j Y_T^{(d-1)}\left(\frac{i}{T}\right) + T \left(t - \frac{j}{T}\right) \frac{y_j^{(d-1)}}{T^{d-1/2}\sigma} \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T}\right) \end{aligned} \quad (39)$$

このとき、次の定理が成り立つ（証明は、Tanaka (1996) 参照）。

定理 3.14 式 (38) の $I(d)$ 過程に従う時系列 $\{y_j^{(d)}\}$ から構成され、(39) で定義される部分和過程 $\{Y_T^{(d)}(t)\}$ に対して、 $Y_T^{(d)} \Rightarrow \alpha(1) F_{d-1}$ なる FCLT が成り立つ。

(例 3.9) $d \geq 2$ として、モデル (38) から得られる次の統計量を考えよう。

$$\tilde{\rho}^{(d)} = \frac{\sum_{j=2}^T y_{j-1}^{(d)} y_j^{(d)}}{\sum_{j=2}^T \left(y_{j-1}^{(d)}\right)^2} \quad (40)$$

$\tilde{\rho}^{(d)}$ は、次のモデル

$$y_j^{(d)} = \rho y_{j-1}^{(d)} + y_j^{(d-1)}, \quad (1 - L)^{d-1} y_j^{(d-1)} = u_j$$

における ρ の LSE である。ただし、 ρ の真値は 1 である。また、誤差項 $y_j^{(d-1)}$ は、 $I(d-1)$ 系列となっている。このとき、 $T(\tilde{\rho}^{(d)} - 1)$ の分布収束に関して、次のことが成り立つ（問題 9）。

$$T(\tilde{\rho}^{(d)} - 1) \Rightarrow \frac{F_{d-1}^2(1)/2}{\int_0^1 F_{d-1}^2(t) dt} = \frac{\int_0^1 F_{d-1}(t) dF_{d-1}(t)}{\int_0^1 F_{d-1}^2(t) dt} \quad (d \geq 2) \quad (41)$$

すなわち、LSE の漸近分布は、 $d \geq 2$ ならば、モデルの誤差項が i.i.d. でも、従属的な線形過程でも、同一となる。この点についても、 $d = 1$ の場合と異なっており、 $d = 1$ の場合は例外的であることがわかる。

3.8 多次元 $I(d)$ 過程に対する FCLT

今までは 1 次元確率過程について議論してきたが、ここでは、多次元の確率過程を扱う。まず、区間 $[0, 1]$ で定義された q 次元連続関数の空間を $C^q[0, 1]$ とする。以下、簡単のため、

$C^q[0, 1]$ を、単に C^q と表す. そして, C^q 上の基本的な確率過程として, 第 2 章 2 節で定義した q 次元 Bm (標準 Brown 運動) を導入する.

• **q 次元 Bm** 次の 3 つの条件をみたす C^q 上の確率過程 $\{\mathbf{W}(t)\}$ を q 次元 Bm と呼ぶ.

- (a) $P(\mathbf{W}(0) = \mathbf{0}) = 1$
- (b) 任意の時点 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq 1$ に対して, 時点が重ならない増分 $\mathbf{W}(t_1) - \mathbf{W}(t_0), \mathbf{W}(t_2) - \mathbf{W}(t_1), \dots, \mathbf{W}(t_n) - \mathbf{W}(t_{n-1})$ は互いに独立である.
- (c) $0 \leq s < t \leq 1$ に対して, $\mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(s) \sim N(0, (t-s)I_q)$. ここで, I_q は, q 次の単位行列である.

次に, $\{\epsilon_j\}$ を q 次元 i.i.d. 系列で, $E(\epsilon_j) = \mathbf{0}$, $V(\epsilon_j) = E(\epsilon_j \epsilon_j') = \Sigma$ となるものとする. すなわち, $\{\epsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, \Sigma)$ である. Σ は, 正値定符号であると仮定する. そして, $\{\epsilon_j\}$ に基づいて, C^q 上の部分和過程 $\{\mathbf{X}_T(t)\}$ を次のように構成する.

$$\mathbf{X}_T(t) = \Sigma^{-1/2} \left[\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=1}^{[Tt]} \epsilon_j + (Tt - [Tt]) \frac{\epsilon_{[Tt]+1}}{\sqrt{T}} \right] \quad (42)$$

空間 C^q 上の事象を扱うために, 一様距離

$$\rho_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leq i \leq q} \sup_{0 \leq t \leq 1} |x_i(t) - y_i(t)|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in C^q$$

を導入して, この距離に関して開集合となるような C^q の部分集合から作られる Borel 集合族を $\mathcal{B}(C^q)$ とすれば, 可測空間 $(C^q, \mathcal{B}(C^q))$ 上に確率が定義される. したがって, $\{\mathbf{W}(t)\}$ や $\{\mathbf{X}_T(t)\}$ のような C^q 上の確率過程の Borel 事象に関する確率を議論することが可能になる.

このとき, 次の FCLT が成り立つ (Billingsley (1968) 参照).

定理 3.15 式 (42) で定義された q 次元部分和過程 $\{\mathbf{X}_T(t)\}$ は, $T \rightarrow \infty$ のとき, q 次元 Bm $\{\mathbf{W}(t)\}$ に弱収束する. すなわち, $P(\partial A) = 0$ (∂A は, A の境界点) となるような任意の $A \in \mathcal{B}(C^q)$ に対して,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(\mathbf{X}_T \in A) = P(\mathbf{W} \in A)$$

となる. このときの弱収束を, $\mathbf{X}_T \Rightarrow \mathbf{W}$ と表すことにする.

多変量の FCLT は, 1 変量の場合と同様に, 多変量の中心極限定理を特殊な場合として含んでいる. 実際, 時点 t を固定すれば, $\mathbf{X}_T(t) \Rightarrow \mathbf{W}(t)$ となる. また, 多変量の場合にも, FCLT を現実に応用するためには, CMT と組み合わせて使うのが有効である. 例として, 次の q 次元ランダム・ウォークを取り上げよう.

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j-1} + \epsilon_j, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \{\epsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (j = 1, \dots, T) \quad (43)$$

(例 3.10) モデル (43) から得られる標本 2 次モーメントの行列を考えよう.

$$S_{10T} = \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \mathbf{x}_j \mathbf{x}_j' \quad (44)$$

部分和過程を (42) で定義すると、定理 3.15 の FCLT により、 $\mathbf{X}_T \Rightarrow \mathbf{W}$ となる。また、

$$S_{10T} = \Sigma^{1/2} \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \mathbf{X}_T \left(\frac{j}{T} \right) \mathbf{X}_T' \left(\frac{j}{T} \right) \Sigma^{1/2} = \Sigma^{1/2} [H_1(\mathbf{X}_T) + R_{1T}] \Sigma^{1/2}$$

と表すことができる。ここで、

$$H_1(\mathbf{x}) = \int_0^1 \mathbf{x}(t) \mathbf{x}'(t) dt, \quad \mathbf{x} \in C^q$$

は、 C^q 上の連続関数である。したがって、CMT により、 $H_1(\mathbf{X}_T) \Rightarrow H_1(\mathbf{W})$ を得る。他方、

$$\begin{aligned} R_{10T} &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \mathbf{X}_T \left(\frac{j}{T} \right) \mathbf{X}_T' \left(\frac{j}{T} \right) - \int_0^1 \mathbf{X}_T(t) \mathbf{X}_T'(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^T \int_{(j-1)/T}^{j/T} \left[\mathbf{X}_T \left(\frac{j}{T} \right) \mathbf{X}_T' \left(\frac{j}{T} \right) - \mathbf{X}_T(t) \mathbf{X}_T'(t) \right] dt \end{aligned}$$

である。ここで、行列に対する通常のノルム $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A'A)}$ を使って、剰余項を評価すると、

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{X}_T \left(\frac{j}{T} \right) \mathbf{X}_T' \left(\frac{j}{T} \right) - \mathbf{X}_T(t) \mathbf{X}_T'(t) \right\| \\ &= \left\| \left(\mathbf{X} \left(\frac{j}{T} \right) - \mathbf{X}_T(t) \right) \mathbf{X}_T' \left(\frac{j}{T} \right) + \mathbf{X}_T(t) \left(\mathbf{X}_T \left(\frac{j}{T} \right) - \mathbf{X}_T(t) \right)' \right\| \\ &\leq \frac{2\|\Sigma^{-1/2}\|}{\sqrt{T}} \max_{1 \leq j \leq T} \|\boldsymbol{\varepsilon}_j\| \sup_{0 \leq t \leq 1} \|\mathbf{X}_T(t)\| \end{aligned}$$

となり、最右辺の値は 0 へ確率収束することがわかる。以上から、 S_{10T} に関して、次の分布収束を得る。

$$S_{10T} = \Sigma^{1/2} [H_1(\mathbf{X}_T) + R_{1T}] \Sigma^{1/2} \Rightarrow \Sigma^{1/2} \int_0^1 \mathbf{W}(t) \mathbf{W}'(t) dt \Sigma^{1/2}$$

次に、(43) のモデルを q 次元 I(1) モデルに拡張しよう。

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{0}, \quad (j = 1, \dots, T) \quad (45)$$

誤差項 $\{\mathbf{u}_j\}$ は q 次元線形過程であり、次のように定義される。

$$\mathbf{u}_j = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \boldsymbol{\xi}_{j-l}, \quad \{\boldsymbol{\xi}_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, I_q), \quad A = \sum_{l=0}^{\infty} A_l, \quad \sum_{l=1}^{\infty} l \|A_l\| < \infty \quad (46)$$

ここで、行列 A は正則であると仮定する。 $\|A\|$ は、行列 A のノルムである。また、ここでは、 $V(\boldsymbol{\xi}_j) = I_q$ という仮定を置いているが、これは、以下で述べる漸近理論を簡潔に表現するためである。なお、 A_0 を必ずしも単位行列とは仮定しないので、この制約は一般性を失わない。

このような線形過程 $\{\mathbf{u}_j\}$ に基づいて、部分和過程

$$\mathbf{Y}_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{j=1}^{[Tt]} \mathbf{u}_j + (Tt - [Tt]) \frac{\mathbf{u}_{[Tt]+1}}{\sqrt{T}} \quad (47)$$

を定義しよう. このとき, 次の定理が成り立つ (証明は, Phillips-Durlauf (1986), Tanaka (1996), Dhrymes (1998) を参照).

定理 3.16 式 (47) で定義された q 次元部分和過程 $\{\mathbf{Y}_T(t)\}$ は, $T \rightarrow \infty$ のとき, q 次元確率過程 $\{A \mathbf{W}(t)\}$ に弱収束する. すなわち, $\mathbf{Y}_T \Rightarrow A \mathbf{W}$ となる.

(例 3.11) モデル (45) から得られる標本 2 次モーメントの行列に関して, 次の分布収束を得る.

$$S_{11T} = \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \mathbf{y}_j \mathbf{y}_j' \Rightarrow A \int_0^1 \mathbf{W}(t) \mathbf{W}'(t) dt A' \quad (48)$$

今度は, 差分パラメータ d を 2 以上の任意の自然数として, q 次元 d 重単位根系列を考えよう.

$$(1-L)^d \mathbf{x}_j^{(d)} = \boldsymbol{\varepsilon}_j, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (j = 1, \dots, T) \quad (49)$$

ここで, d 個の初期値 $\mathbf{x}_k^{(d)}$ ($k = -d+1, -d+2, \dots, 0$) は, すべて $\mathbf{0}$ ベクトルであるとする. 上の $\{\mathbf{x}_j^{(d)}\}$ から, C^q 上の部分和過程を次のように構成する.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_T^{(d)}(t) &= \frac{\mathbf{x}_{[Tt]}^{(d)}}{T^{d-1/2}} + (Tt - [Tt]) \frac{\mathbf{x}_{[Tt]+1}^{(d-1)}}{T^{d-1/2}} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^j \mathbf{X}_T^{(d-1)}\left(\frac{i}{T}\right) + T \left(t - \frac{j}{T}\right) \frac{\mathbf{x}_j^{(d-1)}}{T^{d-1/2}} \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T}\right) \end{aligned} \quad (50)$$

さらに, q 次元の k 重積分 Bm を,

$$\mathbf{F}_k(t) = \int_0^t \mathbf{F}_{k-1}(s) ds, \quad \mathbf{F}_0(t) = \mathbf{W}(t) \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (51)$$

とする. このとき, 1 次元の積分 Brown 運動の場合と同様に, 数学的帰納法により, 次の定理が示される (問題 10).

定理 3.17 式 (49) の q 次元 d 重単位根モデルに従う時系列 $\{\mathbf{x}_j^{(d)}\}$ から構成され, (50) で定義される部分和過程 $\{\mathbf{X}_T^{(d)}(t)\}$ に対して, $\mathbf{X}_T^{(d)} \Rightarrow \Sigma^{1/2} \mathbf{F}_{d-1}$ なる FCLT が成り立つ.

(例 3.12) $d \geq 2$ として, モデル (49) から得られる標本 2 次モーメント行列に関して, 次の分布収束が成り立つ.

$$S_{12T} = \frac{1}{T^{2d}} \sum_{j=1}^T \mathbf{x}_j^{(d)} \left(\mathbf{x}_j^{(d)}\right)' \Rightarrow \Sigma^{1/2} \int_0^1 \mathbf{F}_{d-1}(t) \mathbf{F}_{d-1}'(t) dt \Sigma^{1/2} \quad (52)$$

本節の最後として, q 次元の $I(d)$ 過程を考えよう.

$$(1-L)^d \mathbf{y}_j^{(d)} = \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_j = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \boldsymbol{\xi}_{j-l}, \quad \{\boldsymbol{\xi}_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, I_q) \quad (j = 1, \dots, T) \quad (53)$$

初期値 $\mathbf{y}_k^{(d)}$ ($k = -d+1, -d+2, \dots, 0$) は、すべて $\mathbf{0}$ ベクトルであるとする。また、 $\{\mathbf{u}_j\}$ は、式 (46) で定義された q 次元線形過程である。 $\{\mathbf{y}_j^{(d)}\}$ から、 C^q 上の部分和過程を次のように構成する。

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_T^{(d)}(t) &= \frac{\mathbf{y}_{[Tt]}^{(d)}}{T^{d-1/2}} + (Tt - [Tt]) \frac{\mathbf{y}_{[Tt]+1}^{(d-1)}}{T^{d-1/2}} \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^j \mathbf{Y}_T^{(d-1)}\left(\frac{i}{T}\right) + T \left(t - \frac{j}{T}\right) \frac{\mathbf{y}_j^{(d-1)}}{T^{d-1/2}} \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T}\right) \end{aligned} \quad (54)$$

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 3.18 式 (53) の q 次元 $I(d)$ 過程に従う時系列 $\{\mathbf{y}_j^{(d)}\}$ ($d \geq 2$) から構成され、(54) で定義される部分和過程 $\{\mathbf{Y}_T^{(d)}(t)\}$ に対して、 $\mathbf{Y}_T^{(d)} \Rightarrow A \mathbf{F}_{d-1}$ なる FCLT が成り立つ。

(例 3.13) モデル (53) から得られる標本 2 次モーメント行列に関して、次の分布収束が成り立つ。

$$S_{13T} = \frac{1}{T^{2d}} \sum_{j=1}^T \mathbf{y}_j^{(d)} (\mathbf{y}_j^{(d)})' \Rightarrow A \int_0^1 \mathbf{F}_{d-1}(t) \mathbf{F}_{d-1}'(t) dt A' \quad (55)$$

3.9 多次元 Ito 積分への分布収束

行列値の Ito 積分への分布収束は、Chan-Wei (1988) により示された次の結果が基本となる。

定理 3.19 q 次元ランダム・ウォーク

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{j-1} + \boldsymbol{\xi}_j, \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \quad \{\boldsymbol{\xi}_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, I_q), \quad (j = 1, \dots, T) \quad (56)$$

に対して、 $q \times q$ 行列値統計量

$$Q_T = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \mathbf{x}_{j-1} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_{j-1})' = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (\boldsymbol{\xi}_1 + \dots + \boldsymbol{\xi}_{j-1}) \boldsymbol{\xi}_j'$$

は、次の分布収束に従う。

$$Q_T \Rightarrow Q = \int_0^1 \mathbf{W}(t) d\mathbf{W}'(t) \quad (57)$$

収束先は、行列値の Ito 積分である。前章 4 節で述べたように、 $\mathbf{W}(t)$ の第 k 成分を $W_k(t)$ とすれば、次のことが成り立つ。

$$\int_0^t W_k(u) dW_l(u) \stackrel{D}{=} \begin{cases} \frac{t}{2} (W_k^2(1) - 1) & (k = l \text{ のとき}) \\ \frac{t}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{1n}^2 - \xi_{2n}^2}{(n-1/2)\pi} & (k \neq l \text{ のとき}) \end{cases} \quad (58)$$

ただし、 $(\xi_{1n}, \xi_{2n})' \sim \text{NID}(\mathbf{0}, I_2)$ である。

定理 3.19 の結果は、Phillips (1988) により、次のように拡張された。

定理 3.20 次の q 次元 I(1) モデルを考えよう.

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \quad (j = 1, \dots, T) \quad (59)$$

$$\mathbf{u}_j = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \boldsymbol{\xi}_{j-l}, \quad \{\boldsymbol{\xi}_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, I_q), \quad A = \sum_{l=0}^{\infty} A_l, \quad \sum_{l=1}^{\infty} l \|A_l\| < \infty \quad (60)$$

ここで、行列 A は正則であると仮定する. このとき、次の $q \times q$ 行列値統計量

$$\tilde{Q}_T = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \mathbf{y}_{j-1} (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1})' = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{j-1}) \mathbf{u}_j' \quad (61)$$

は、次の分布収束に従う.

$$\tilde{Q}_T \Rightarrow \tilde{Q} = A \int_0^1 \mathbf{W}(t) d\mathbf{W}'(t) A' + \Omega \quad (62)$$

ここで、

$$\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_l A_{k+l}', \quad \Gamma(k) = E(\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_k')$$

この定理では、分布の収束先が複雑な表現となっているが、スカラーの場合には、(例 3.5) から次の結果が得られる (問題 11).

$$\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T y_{j-1} (y_j - y_{j-1}) \Rightarrow \alpha^2(1) \int_0^1 W(t) dW(t) + \omega$$

ここで、

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\alpha^2(1) - \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \alpha_{k+l} = \sum_{k=1}^{\infty} E(u_0 u_k)$$

となるので、確かに、定理 3.20 はスカラーの場合には成り立つ.

ベクトルの場合には、式 (62) の Ω の表現は、直観的には、次のようにして求めることができる.

$$\begin{aligned} \Omega &= \lim_{T \rightarrow \infty} E(R_T) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left(\frac{1}{T} \sum_{j=1}^T (\mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{u}_{j-1}) \mathbf{u}_j' \right) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{T-1} (T-k) \Gamma(k) = \sum_{k=1}^T \left(1 - \frac{k}{T} \right) \Gamma(k) \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(k) \end{aligned}$$

ここで、最後の和は、仮定より収束が保証され、左辺の Cesàro 和の極限となる (Anderson (1971, p. 460)).

以下、定理 3.20 の証明を与えておこう. まず、ベクトル値線形過程 $\mathbf{u}_j$ を

$$\mathbf{u}_j = A \boldsymbol{\xi}_j + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{j-1} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j, \quad \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{A}_l \boldsymbol{\xi}_{j-l}, \quad \tilde{A}_l = \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k$$

と B-N 分解することにより, $\tilde{Q}_T$ は, 次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_T &= \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \left(A \mathbf{x}_{j-1} + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{j-1} \right) \left(A \boldsymbol{\xi}_j + \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{j-1} - \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j \right)' \\ &= \frac{1}{T} \left(A \sum_{j=1}^T \mathbf{x}_{j-1} \boldsymbol{\xi}_j' A' + A \sum_{j=1}^T \boldsymbol{\xi}_j \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j' - \sum_{j=1}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{j-1} \mathbf{u}_j' \right) + o_p(1)\end{aligned}$$

ここで, $o_p(1)$ の項は, 零行列に確率収束するような項である. 他方, $\mathbf{x}_j$ は, 式 (56) で定義された q 次元ランダム・ウォークである.

このとき, 次の確率収束が成り立つ.

$$\frac{1}{T} A \sum_{j=1}^T \boldsymbol{\xi}_j \tilde{\boldsymbol{\xi}}_j' \rightarrow G = A(A - A_0)', \quad \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}}_{j-1} \mathbf{u}_j' \rightarrow H = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} A_k A_{l+1}'$$

さらに, これらの確率収束先の値の差 $G - H$ は, 次のようになる.

$$G - H = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=l+1}^{\infty} A_l A_m' = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} A_l A_{k+l}' = \sum_{k=1}^{\infty} E(\mathbf{u}_0 \mathbf{u}_k')$$

以上より, 定理 3.19 と CMT を使うことにより, 定理 3.20 が成り立つことがわかる.

(例 3.14) 式 (59) の q 次元 I(1) モデルに従う $\mathbf{y}_j$ に対して, 次の統計量を考えよう.

$$\hat{B} = \sum_{j=2}^T \mathbf{y}_j \mathbf{y}_{j-1}' \left(\sum_{j=2}^T \mathbf{y}_{j-1} \mathbf{y}_{j-1}' \right)^{-1} \quad (63)$$

$\hat{B}$ は, モデル $\mathbf{y}_j = B \mathbf{y}_{j-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_j$ において, B の真値が I_q である場合の B の OLS 推定量である. このとき, 定理 3.16 と定理 3.20, および CMT により, 次のことが成り立つ.

$$\begin{aligned}T(\hat{B} - I_q) &= \left(\frac{1}{T} \sum_{j=2}^T \mathbf{y}_{j-1} \mathbf{u}_j' \right)' \left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=2}^T \mathbf{y}_{j-1} \mathbf{y}_{j-1}' \right)^{-1} \\ &\Rightarrow \left(A \int_0^1 \mathbf{W}(t) d\mathbf{W}'(t) A' + \Omega \right)' \left(A \int_0^1 \mathbf{W}(t) \mathbf{W}'(t) dt A' \right)^{-1}\end{aligned}$$

第 3 章 練習問題

1. 次のように定義される確率過程 $\{X_T(t)\}$ は緊密であることを示せ.

$$X_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \sum_{i=1}^{[Tt]} \varepsilon_i + (Tt - [Tt]) \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \varepsilon_{[Tt]+1} \quad \left(\frac{j-1}{T} \leq t \leq \frac{j}{T} \right)$$

2. 次の 2 つの確率過程は, C 上の連続関数であることを示せ. ただし, $X_T(t)$ は問題 1 で定義された確率過程である.

$$\bar{X}_T(t) = X_T(t) - t X_T(1), \quad \tilde{X}_T(t) = X_T(t) - \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T X_T(j/T)$$

3. $x(t)$ を C 上の連続関数とすると, 次の 3 つの関数も連続であることを示せ.

$$h_1(x) = \int_0^1 x(t) dt, \quad h_2(x) = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad h_3(x) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$$

4. $\{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)$ のとき, 次のことを示せ. また, $\{\varepsilon_j\}$ が線形過程の場合でも, 次のことが成り立つことを示せ.

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq T} \frac{|\varepsilon_j|}{\sqrt{T}} = 0$$

5. $\{y_j\}$ をランダム・ウォークとすると, 次の分布収束が成り立つことを示せ.

$$\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T (y_j - \bar{y})^2 \Rightarrow \sigma^2 \left[\int_0^1 \left\{ W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right\}^2 dt \right]$$

6. 線形過程 $\{u_j\}$ に対して, C 上の部分和過程を

$$Y_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} \sum_{j=1}^{[Tt]} u_j + (Tt - [Tt]) \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} u_{[Tt]+1}$$

で定義する. このとき, 次の量 R_T は, $T \rightarrow \infty$ のとき, 0 に確率収束することを示せ.

$$R_T = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T Y_T^2\left(\frac{j}{T}\right) - \int_0^1 Y_T^2(t) dt$$

7. 次の AR(1) モデル

$$y_j = \rho_T y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad y_0 = 0, \quad \rho_T = 1 - \frac{c}{T}$$

は, 次のように変形されることを示せ.

$$y_j = \rho_T^{-1} S_j - \frac{c}{T} \sum_{i=1}^j \rho_T^{j-i-1} S_i, \quad S_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i$$

8. ランダム・ウォーク近接モデル $y_j = \rho_T y_{j-1} + \varepsilon_j$, $y_0 = 0$, $\rho_T = 1 - (c/T)$ に従う時系列 $\{y_j\}$ に対して, C 上で次の 2 つの量を定義する.

$$Z_T(t) = \frac{1}{\sqrt{T}\sigma} y_j + T \left(t - \frac{j}{T} \right) \frac{y_j - y_{j-1}}{\sqrt{T}\sigma}, \quad h_t(z) = z(t) - ce^{-ct} \int_0^t e^{cs} z(s) ds$$

このとき, $X_T = X_T(t)$ を問題 1 で定義された確率過程として, 次のことを示せ.

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t \leq 1} |Z_T(t) - h_t(X_T)| = 0$$

9. モデル $y_j = \rho y_{j-1} + v_j$ において, 誤差項 v_j が $I(d-1)$ 過程であるとする. ただし, d は 2 以上の自然数である. このとき, ρ の LSE $\hat{\rho}$ は, $\rho = 1$ ならば次の分布収束に従うことを示せ.

$$T(\hat{\rho} - 1) \Rightarrow \frac{F_{d-1}^2(1)/2}{\int_0^1 F_{d-1}^2(t) dt}$$

ここで, $\{F_k(t)\}$ は, k 重積分 Brown 運動である.

10. $\{\mathbf{x}_j^{(d)}\}$ が, 次の q 次元 d 重単位根モデルに従う時系列とする.

$$(1-L)^d \mathbf{x}_j^{(d)} = \varepsilon_j, \quad \{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, \Sigma) \quad (j = 1, \dots, T)$$

このとき, 次のことが成り立つことを示せ.

$$S_T = \frac{1}{T^{2d}} \sum_{j=1}^T \mathbf{x}_j^{(d)} (\mathbf{x}_j^{(d)})' \Rightarrow \Sigma^{1/2} \int_0^1 \mathbf{F}_{d-1}(t) \mathbf{F}_{d-1}'(t) dt \Sigma^{1/2}$$

ここで, $\{\mathbf{F}_k(t)\}$ は, q 次元 k 重積分 Brown 運動である.

11. $\{y_j\}$ が, $I(1)$ モデル $y_j = y_{j-1} + u_j$ ($y_0 = 0$) に従うとする. ここで,

$$u_j = \alpha(L)\varepsilon_j = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \varepsilon_{j-l}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} j |\alpha_j| < \infty, \quad \{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, 1)$$

このとき, 次の分布収束を示せ.

$$\frac{1}{T} \sum_{j=2}^T y_{j-1}(y_j - y_{j-1}) \Rightarrow \alpha^2(1) \int_0^1 W(t) dW(t) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} E(u_0 u_k)$$

12. q 次元 $I(d)$ 系列 $\{\mathbf{y}_j\}$ が次のように定義されている.

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_{j-1} + \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{0} \quad (j = 1, \dots, T)$$

$$\mathbf{u}_j = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \boldsymbol{\xi}_{j-l}, \quad \{\boldsymbol{\xi}_j\} \sim \text{i.i.d.}(\mathbf{0}, I_q), \quad A = \sum_{l=0}^{\infty} A_l, \quad \sum_{l=1}^{\infty} l \|A_l\| < \infty$$

このとき, 次の統計量 $Q_T(h)$ の分布収束を求めよ. ただし, h は固定された自然数である.

$$Q_T(h) = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T \mathbf{y}_{j-h} (\mathbf{y}_j - \mathbf{y}_{j-1})'$$