

第 4 章「特性関数の導出 - その 1」

前章では、さまざまな非定常モデルから得られる統計量が Bm や O-U 過程などの汎関数に分布収束することを FCLT や CMT に基づいて説明した。しかし、分布収束を示すことと、実際にその極限分布を計算することは、別の問題である。シミュレーションなどによらずに、分布関数や密度関数を数値積分で計算する場合には、まず、統計量に関連した特性関数を導出し、それを反転公式により積分計算する必要がある。そのために、本章と次章では、特性関数を導出するための方法について説明する。

4.1 3 つのアプローチ

本章では、まず、正規過程に従う確率過程の 2 乗の積分として与えられる統計量 S を考える。このとき、統計量 S は、次のように分布の意味で同値な 2 つの別表現をもつ。

$$S = \int_0^1 X^2(t) dt \stackrel{D}{=} \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dW(s) dW(t) \stackrel{D}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} Z_n^2 \quad (1)$$

ここで、

- (a) $\{X(t)\}$ は $[0, 1]$ 上で定義された平均 0 の正規過程である。
- (b) $K(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t))$ であり、 $\{W(t)\}$ は Bm (標準 Brown 運動) である。
- (c) $\{Z_n\} \sim \text{NID}(0, 1)$ である。また、 λ_n は、積分方程式 (詳細については次章を参照)

$$f_n(t) = \lambda_n \int_0^1 K(s, t) f_n(s) ds \quad (2)$$

の固有値であり、正の実数である。ここで、 $f_n(t)$ は λ_n に対応する固有関数である。

式 (1) の関係が成り立つことは、次の 2 つの定理から導くことができる。最初の定理は、すでに第 2 章の議論の中で使われた事実である。証明は、例えば、Loève (1978) を参照されたい。

定理 4.1 (Karhunen-Loève 展開) 平均 0 の正規過程 $\{X(t)\}$ は、次のように展開できる。

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} Z_n, \quad \{Z_n\} \sim \text{NID}(0, 1) \quad (3)$$

ここで、無限和は平均 2 乗の意味で収束する。また、固有関数の列 $\{f_n(t)\}$ は正規直交であり、固有値 λ_n は、重複度 (= 1 次独立な固有関数の最大個数) の分だけ繰り返されている。

この定理の中で使われている固有値の重複度の概念については、あとで詳しく述べることにする。Karhunen-Loève 展開により、次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 X^2(t) dt \stackrel{D}{=} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} Z_n \right)^2 dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_m Z_n}{\sqrt{\lambda_m \lambda_n}} \int_0^1 f_m(t) f_n(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} Z_n^2 \end{aligned} \quad (4)$$

もう 1 つの定理は，共分散関数 $K(s, t)$ の展開表現に関するものである．証明は，例えば，Hochstadt (1973) を参照されたい．

定理 4.2 (Mercer の定理 - その 1) $[0, 1] \times [0, 1]$ 上で定義された対称，連続な共分散関数 $K(s, t)$ は，次のように展開される．

$$K(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} f_n(s) f_n(t) \quad (5)$$

ここで，和は， s, t に関して，一様に絶対収束する．また， $f_n(t)$ は，固有値 λ_n に対応する正規直交固有関数であり， λ_n は重複度の分だけ繰り返されている．

Mercer の定理は，関数 $K(s, t)$ が必ずしも共分散関数でない場合にも適用できるので，応用範囲は広い．条件をゆるめた場合の定理については，次章 1 節で説明する．

定理 4.2 の Mercer の定理により，次のことが成り立つ．

$$\begin{aligned} S &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 K(s, t) dW(s) dW(t) = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} f_n(s) f_n(t) dW(s) dW(t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_0^1 f_n(t) dW(t) \right)^2 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} Z_n^2 \end{aligned} \quad (6)$$

したがって，この表現と，Karhunen-Loève 展開による (4) の結果より，式 (1) で与えられた同値関係が成立することが分かった．

なお，式 (1) の重積分による表現においては，関数 K を $K(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t))$ により定義したが，別の関数で定義しても同値関係が成り立つことを注意しておく．例えば， $X(t) = W(t)$ ならば，式 (1) からは $K(s, t) = \text{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s, t)$ が得られるが，次に示すように， $K(s, t) = 1 - \max(s, t)$ としても同値関係が成り立つ．しかも，この関係は，平均 2 乗の意味で成り立つ．

$$\begin{aligned} \int_0^1 W^2(t) dt &= \int_0^1 \left(\int_0^t \int_0^t dW(u) dW(v) \right) dt = \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\max(u, v)}^1 dt \right) dW(u) dW(v) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dW(s) dW(t) \end{aligned} \quad (7)$$

したがって，次のことが成り立つ．

$$\int_0^1 W^2(t) dt = \int_0^1 \int_0^1 [1 - \max(s, t)] dW(s) dW(t) \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \min(s, t) dW(s) dW(t) \quad (8)$$

このことと，式 (6) の関係から， $1 - \max(s, t)$ と $\min(s, t)$ は同一の固有値をもつことがわかる．ただし，固有関数は異なることに注意されたい．この点については，次章で説明する．

別の例として，次の関係も成り立つことがわかる（問題 1）．

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right)^2 dt &= \int_0^1 \int_0^1 [\min(s, t) - st] dW(s) dW(t) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - \max(s, t) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right] dW(s) dW(t) \end{aligned} \quad (9)$$

さらに，この例と密接に関連する統計量に関して，次のことが成り立つ（問題 2）．

$$\begin{aligned} \int_0^1 (W(t) - t W(1))^2 dt &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - \max(s, t) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right] dW(s) dW(t) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 [\min(s, t) - st] dW(s) dW(t) \end{aligned} \quad (10)$$

結局，式 (9) と (10) の表現から，次のことが成り立つことがわかる．

$$\int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right)^2 dt \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 (W(t) - tW(1))^2 dt \quad (11)$$

再び，式 (1) の統計量 S に戻ろう．今までの議論より， S の分布の特性関数を求めるには，3 つのタイプの表現のうち，扱いやすい 1 つの表現を使えばよいことがわかった．以下では，説明の便宜上，それぞれの表現に基づく導出方法を次のように呼ぶことにする．

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} Z_n^2$: 固有値アプローチ
- (b) $\int_0^1 X^2(t) dt$: Girsanov アプローチ
- (c) $\int_0^1 \int_0^1 K(s, t), dW(s) dW(t)$: Fredholm アプローチ

本章では，上記 3 つのアプローチの最初の 2 つ (a), (b) について説明し，最後のアプローチ (c) については次章で説明する．なお，これらのアプローチは，(1) の形の統計量以外にも，比の形の統計量なども扱えるので，これらについても適宜説明を加えることにする．

4.2 固有値アプローチ

特性関数を導出するために，最初に取り上げる方法は，直観的には非常に分かりやすいものであり，行列の固有値，あるいは積分方程式の固有値を使った方法である．この方法を固有値アプローチと呼ぶことにする．

以下，固有値アプローチについて，いくつかの例で説明するが，そのために，次のランダム・ウォークを定義しておこう．

$$y_j = y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad y_0 = 0, \quad \{\varepsilon_j\} \sim \text{NID}(0, 1) \quad (12)$$

ここで，誤差項に標準正規性を仮定しているが，漸近理論あるいは FCLT の観点からは，何ら制約とはならないことに留意されたい．

(例 4.1) 次の統計量の分布を考えよう．

$$S_{1T} = \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T y_j^2 = \frac{1}{T^2} \varepsilon' C' C \varepsilon = \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T (T+1 - \max(j, k)) \varepsilon_j \varepsilon_k \quad (13)$$

ただし，

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_T \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \cdot & \cdot & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & \cdot & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

行列 C は，ランダム・ウォーク $y_j = y_{j-1} + \varepsilon_j$ に従うベクトル $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_T)'$ を $\mathbf{y} = C\varepsilon$ と表す際に使われる行列であり，ランダム・ウォーク生成行列と呼ぶことにする．

統計量 S_{1T} の極限分布に関しては，第 3 章の議論から，次の FCLT が成り立つ．

$$S_{1T} \Rightarrow \int_0^1 W^2(t) dt = S_1 \quad (14)$$

ここで、 $\{W(t)\}$ は、 $[0, 1]$ 上で定義される Bm である．ここでの目的は、 S_1 の特性関数を求めることである．そのために、3 つの導出方法を示そう．

最初の方法は、 S_{1T} の特性関数を求め、その極限として S_1 の特性関数を導出する方法である．ここでは、 S_{1T} を少し変形した $\tilde{S}_{1T} = T^2 S_{1T} / (T + 1/2)^2 = \epsilon' C' C \epsilon / (T + 1/2)^2$ の m.g.f. (積率母関数) を求めてみよう．まず、多変量正規分布の性質、および、 $|C| = |C'| = 1$ であることを使って、次の表現が得られる．

$$\begin{aligned} m_{1T}(\theta) &= E \left[\exp \left\{ \frac{\theta}{(T + 1/2)^2} \epsilon' C' C \epsilon \right\} \right] = \left| I_T - \frac{2\theta}{(T + 1/2)^2} C' C \right|^{-1/2} \\ &= \left| (C' C)^{-1} - \frac{2\theta}{(T + 1/2)^2} I_T \right|^{-1/2} = (D_T(\theta))^{-1/2} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} D_T(\theta) &= \left| (C' C)^{-1} - \frac{2\theta}{(T + 1/2)^2} I_T \right| \\ &= (2 - a) D_{T-1}(\theta) - D_{T-2}(\theta) \quad \left(a = \frac{2\theta}{(T + 1/2)^2} \right) \end{aligned}$$

である．したがって、 $D_T(\theta)$ は、次の差分方程式の解となる．

$$D_T(\theta) - (2 - a) D_{T-1}(\theta) + D_{T-2}(\theta) = 0, \quad D_1(\theta) = 1 - a, \quad D_2(\theta) = a^2 - 3a + 1 \quad (15)$$

この解は、次のように与えられる (問題 3) ．

$$D_T(\theta) = \cos T\omega - \frac{a \sin T\omega}{2 \sin \omega} \quad \left(\omega = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2 - a} \right) \quad (16)$$

したがって、正規性のもとで次の結果を得る．

$$m_{1T}(\theta) = E \left[\exp \left\{ \frac{\theta}{(T + 1/2)^2} \epsilon' C' C \epsilon \right\} \right] = \left(\cos T\omega - \frac{a \sin T\omega}{2 \sin \omega} \right)^{-1/2} \quad (17)$$

次に、 $T \rightarrow \infty$ のときの $m_{1T}(\theta)$ について考えよう．まず、 $a = 2\theta / (T + 1/2)^2$ であることから、次のことが成り立つ (問題 4) ．

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2 - a} &= \frac{\sqrt{2\theta}}{T} \left(1 - \frac{1}{2T} + \frac{3\theta + 1}{4T^2} + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \right) \\ T\omega &= T \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2 - a} = \sqrt{2\theta} \left(1 - \frac{1}{2T} + \frac{\theta + 3}{12T^2} + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \right) \\ \cos T\omega &= \cos \sqrt{2\theta} + \frac{\sqrt{2\theta}}{2T} \sin \sqrt{2\theta} - \frac{1}{4T^2} \left(\theta \cos \sqrt{2\theta} + \sqrt{2\theta} (1 + \theta/3) \sin \sqrt{2\theta} \right) + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \\ \sin T\omega &= \sin \sqrt{2\theta} - \frac{\sqrt{2\theta}}{2T} \cos \sqrt{2\theta} + O\left(\frac{1}{T^2}\right) \\ \frac{a}{2 \sin \omega} &= \frac{\sqrt{2\theta}}{2T} \left(1 - \frac{1}{2T} \right) + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{a \sin T\omega}{2 \sin \omega} = \frac{\sqrt{2\theta}}{2T} \sin \sqrt{2\theta} - \frac{1}{4T^2} (2\theta \cos \sqrt{2\theta} + \sqrt{2\theta} \sin \sqrt{2\theta}) + O\left(\frac{1}{T^3}\right)$$

以上より, $m_{1T}(\theta)$ の高次の展開が次のように得られる.

$$\begin{aligned} m_{1T}(\theta) &= \left(\cos T\omega - \frac{a \sin T\omega}{2 \sin \omega} \right)^{-1/2} \\ &= (\cos \sqrt{2\theta})^{-1/2} \left[1 - \frac{\theta}{8T^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2\theta}}{3} \tan \sqrt{2\theta} \right) \right] + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

この表現からは, $1/T$ のオーダーの項が消えている. このことが, S_{1T} ではなく, $\tilde{S}_{1T}$ を考えた理由であり, 分布の漸近展開を考える上では好都合である. いずれにしろ, 式 (14) の極限確率変数 S_1 の特性関数は, 次のようになる.

$$\phi_1(\theta) = E(e^{i\theta S_1}) = \lim_{T \rightarrow \infty} m_{1T}(i\theta) = (\cos \sqrt{2i\theta})^{-1/2}$$

第 2 の方法は, 式 (13) の S_{1T} を表す行列 $C'C$ の対角化に基づく方法である. 行列 $C'C$ を考えると, その (j, k) 要素は $T+1 - \max(j, k)$ であり, j 番目に大きい固有値 λ_j は,

$$\lambda_j = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{j-1/2}{2T+1} \pi \right)^{-2} \quad (j = 1, \dots, T) \quad (19)$$

であることが知られている (Rutherford (1946), 問題 5). このとき, 固有ベクトルからなる直交行列 P が存在して, S_{1T} は, 次のように表すことができる.

$$S_{1T} = \frac{1}{T^2} (P\epsilon)' PC'CP' (P\epsilon) \stackrel{D}{=} \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \lambda_j \varepsilon_j^2 \quad (\{\varepsilon_j\} \sim \text{NID}(0, 1)) \quad (20)$$

ここで, 次の確率収束が成り立つことを示すことができる (問題 6).

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \lambda_j \varepsilon_j^2 - \sum_{j=1}^T \frac{\varepsilon_j^2}{(j-1/2)^2 \pi^2} \right) = 0 \quad (21)$$

このことから, 次の分布収束が成り立つ.

$$S_{1T} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{(n-1/2)^2 \pi^2} = X, \quad \{Z_n\} \sim N(0, 1) \quad (22)$$

極限確率変数 X の分布は, 式 (14) で定義した S_1 の分布に等しい. ただし, S_1 の特性関数の導出は困難であるが, X の特性関数は, 次のように容易に求めることができる.

$$\begin{aligned} \phi_1(\theta) &= E(e^{i\theta X}) = E\left(\exp\left\{i\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{(n-1/2)^2 \pi^2}\right\}\right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2i\theta}{(n-1/2)^2 \pi^2}\right)^{-1/2} = (\cos \sqrt{2i\theta})^{-1/2} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで, 最後の表現は, $\cos z$ に関する次の無限乗積展開を使った.

$$\cos z = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(n-1/2)^2 \pi^2}\right)$$

第 3 の方法は、 $W(t)$ に対する Karhunen-Loève 展開を使うことである．第 2 章で述べたように、 $W(t)$ に対しては、次の Karhunen-Loève 展開が成り立つ．

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(n-1/2)\pi t}{(n-1/2)\pi} Z_n \quad (24)$$

ここで、 $\{Z_n\}$ は、 $\text{NID}(0,1)$ の確率変数列であり、右辺の和は平均 2 乗収束している．

定理 4.1 で述べたように、一般に、 L^2 に属する平均 0 の正規過程 $\{X(t)\}$ の Karhunen-Loève 展開は、

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} Z_n \quad (25)$$

で与えられる．ここで、 λ_n は、積分方程式

$$f_n(t) = \lambda_n \int_0^1 K(s, t) f_n(s) ds, \quad K(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t))$$

の固有値 ($\neq 0$) であり、 $f_n(t)$ は、 λ_n に対応する固有関数である．関数 $K(s, t)$ は、核関数と呼ばれる．今の場合、核関数は共分散関数で定義されているので、正値定符号である．すなわち、 $[0, 1]$ 上の任意の連続関数 $g(t)$ に対して、次のことが成り立つ．

$$\int_0^1 \int_0^1 g(s) g(t) K(s, t) ds dt = E \left[\left\{ \int_0^1 g(t) X(t) dt \right\}^2 \right] \geq 0$$

したがって、固有値 λ_n は、すべて正である．また、核関数が対称関数であるので、固有関数の全体 $\{f_n(t)\}$ は、正規直交系となるように選ぶことができる．

式 (24) と (25) を比べればわかるように、 $\lambda_n = (n-1/2)^2 \pi^2$ が、 $K(s, t) = \text{Cov}(W(s), W(t)) = \min(s, t)$ を核関数とする積分方程式の固有値である．また、固有関数の全体 $\{\sqrt{2} \sin(n-1/2)\pi t\}$ は、区間 $[0, 1]$ における正規直交系となっている．積分方程式に関しては、固有値の求め方なども含め、次章で詳しく議論するので、ここでは省略する．

式 (24) の関係を式 (14) の S_1 に代入することにより、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 W^2(t) dt \stackrel{D}{=} \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin(n-1/2)\pi t}{(n-1/2)\pi} Z_n \right)^2 dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_m Z_n}{(m-1/2)(n-1/2)\pi^2} \int_0^1 \sin(m-1/2)\pi t \sin(n-1/2)\pi t dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2 \pi^2} Z_n^2 \end{aligned} \quad (26)$$

となる．この最後の表現は、すでに、式 (22) で得られたものである．したがって、 S_1 の特性関数として、式 (23) の表現が得られる．

(例 4.2) 式 (12) のランダム・ウォークに従う時系列 $\{y_j\}$ に対して、平均修正された次の統計量を考えよう．

$$\begin{aligned} S_{2T} &= \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T (y_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{T^2} \boldsymbol{\varepsilon}' C' M C \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \sum_{k=1}^T \left[T+1 - \max(j, k) - \frac{1}{T}(T+1-j)(T+1-k) \right] \varepsilon_j \varepsilon_k \end{aligned} \quad (27)$$

ここで,

$$M = I_T - \frac{1}{T} \mathbf{e} \mathbf{e}', \quad \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} : T \times 1$$

である.

統計量 S_{2T} の極限分布に関しては, 第 3 章の議論から, 次の FCLT が成り立つ.

$$S_{2T} \Rightarrow \int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right)^2 dt = \int_0^1 W^2(t) dt - \left(\int_0^1 W(s) ds \right)^2 = S_2 \quad (28)$$

S_2 の特性関数を求めるために, 第 1 の方法として, 前と同様に, まず, S_{2T} の m.g.f. を求めよう. そのために, 行列 M の性質に着目すると,

$$C' M C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & A_{T-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}, \quad A_{T-1} = \left(\left(T - \max(j, k) - \frac{1}{T}(T-j)(T-k) \right) \right)$$

が成り立つ. したがって, $\boldsymbol{\varepsilon}_* = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)'$ として,

$$S_{2T} = \frac{1}{T^2} \boldsymbol{\varepsilon}' C' M C \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{T^2} \boldsymbol{\varepsilon}' A_{T-1} \boldsymbol{\varepsilon}_* \quad (29)$$

と表すことができる. ここで, 次のことが成り立つ (問題 7).

$$A_{T-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} : (T-1) \times (T-1), \quad |A_{T-1}^{-1}| = T$$

行列 A_{T-1}^{-1} は, 反転不可能な MA(1) モデルの共分散行列の形になっていることが見てとれる. 以上から, まず, S_{2T} の m.g.f. は次のようになることが示される (問題 8).

$$\begin{aligned} m_{2T}(\theta) &= E \left[\exp \left\{ \frac{\theta}{T^2} \boldsymbol{\varepsilon}' A_{T-1} \boldsymbol{\varepsilon}_* \right\} \right] = \left| I_{T-1} - \frac{2\theta}{T^2} A_{T-1} \right|^{-1/2} \\ &= \left[|A_{T-1}| \left| A_{T-1}^{-1} - \frac{2\theta}{T^2} I_{T-1} \right| \right]^{-1/2} = \left[\frac{1}{T} \left| A_{T-1}^{-1} - \frac{2\theta}{T^2} I_{T-1} \right| \right]^{-1/2} \\ &= \left[\frac{1}{T} \left(\cos(T-1)\lambda + \frac{(2-b)\sin(T-1)\lambda}{2\sin\lambda} \right) \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

ここで,

$$b = \frac{2\theta}{T^2}, \quad \lambda = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4b - b^2}}{2 - b}$$

である. このことから, $m_{2T}(\theta)$ の高次の展開が次のように得られる (問題 8).

$$m_{2T}(\theta) = \left(\frac{\sin \sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}} \right)^{-1/2} \left[1 - \frac{\theta}{8T^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2\theta}}{3} \cot \sqrt{2\theta} \right) \right] + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \quad (30)$$

この表現においても, $1/T$ のオーダーの項が消えていることに注意されたい. 以上より, 式 (28) の極限確率変数 S_2 の特性関数は, 明らかに, 次のようになる.

$$\phi_2(\theta) = E(e^{i\theta S_2}) = \lim_{T \rightarrow \infty} m_{2T}(i\theta) = \left(\frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2}$$

次に, 第 2 の方法として, 式 (29) の S_{2T} を表す行列 A_{T-1} の対角化に基づく方法を考えよう. そのために, 行列 A_{T-1}^{-1} の固有値を求めよう. それは,

$$D_{T-1} = |A_{T-1}^{-1} - \eta I_{T-1}| = (2 - \eta) D_{T-2} - D_{T-3}, \quad D_1 = 2 - \eta, \quad D_2 = (2 - \eta)^2 - 1$$

の零根として与えられる. この差分方程式を解くことにより, A_{T-1}^{-1} の $T-1$ 個の固有値が求められ, その逆数として, A_{T-1} の固有値 $\xi_1 > \dots > \xi_{T-1}$ が次のように得られる (問題 7).

$$\xi_j = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{j\pi}{2T} \right)^{-2}, \quad (j = 1, \dots, T-1) \quad (31)$$

このとき, S_{2T} は, 次のように表すことができる.

$$S_{2T} = \frac{1}{T^2} \epsilon'_* A_{T-1} \epsilon_* \stackrel{D}{=} \frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^{T-1} \xi_j^2 \epsilon_{j+1}^2, \quad \{\epsilon_j\} \sim \text{NID}(0, 1) \quad (32)$$

さらに, 次の確率収束が成り立つことを示すことができる (問題 9).

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^{T-1} \xi_j^2 \epsilon_{j+1}^2 - \sum_{j=1}^{T-1} \frac{\epsilon_{j+1}^2}{j^2 \pi^2} \right) = 0 \quad (33)$$

このことから, 次の分布収束が成り立つ.

$$S_{2T} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{n^2 \pi^2} = Y, \quad \{Z_n\} \sim N(0, 1) \quad (34)$$

極限確率変数 Y の分布は, 式 (28) で定義した S_2 の分布に等しい. ただし, S_2 の特性関数の導出は困難であるが, Y の特性関数は, 次のように容易に求めることができる.

$$\begin{aligned} \phi_2(\theta) &= E(e^{i\theta Y}) = E \left(\exp \left\{ i\theta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{n^2 \pi^2} \right\} \right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2i\theta}{n^2 \pi^2} \right)^{-1/2} = \left(\frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

ここで, 最後の表現は, $\sin z$ に関する次の無限乗積展開を使った.

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \pi^2} \right)$$

第 3 の方法は, Karhunen-Loève 展開

$$Y(t) = W(t) - \int_0^1 W(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(t)}{\sqrt{\lambda_n}} Z_n$$

を使うことである. ここで, λ_n は, 核関数

$$\text{Cov}(Y(s), Y(t)) = \frac{1}{3} - \max(s, t) + \frac{s^2 + t^2}{2} = \min(s, t) - (s + t) + \frac{s^2 + t^2}{2} + \frac{1}{3}$$

の固有値であり, $f_n(t)$ は λ_n に対応する正規直交固有関数である. 詳しくは, 次章で説明するが, これらは容易に求めることができ, $Y(t)$ の Karhunen-Loève 展開

$$Y(t) = W(t) - \int_0^1 W(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \cos n\pi t}{n\pi} Z_n \quad (36)$$

が得られる.

以上のことから, 統計量 S_2 に関して, 次の表現を得る.

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 Y^2(t) dt = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \cos n\pi t}{n\pi} Z_n \right)^2 dt \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Z_m Z_n}{m n \pi^2} \int_0^1 \cos m\pi t \cos n\pi t dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} Z_n^2 \end{aligned} \quad (37)$$

したがって, この結果から式 (35) の特性関数を導出することができる.

(例 4.3) 式 (28) の統計量 S_2 と比較するために, 別の統計量として, Bb (Brown 橋) の 2 乗の積分を考えよう.

$$S_3 = \int_0^1 (W(t) - tW(1))^2 dt \quad (38)$$

すでに, Karhunen-Loève 展開と Mercer の定理によって, 式 (11) で示したように, S_3 の分布は S_2 と同一である. このことは,

$$\frac{1}{3} - \max(s, t) + \frac{s^2 + t^2}{2} \text{ の固有値} = \min(s, t) - st \text{ の固有値}$$

であることを意味する. 実際, これらの固有値が, $n^2 \pi^2$ ($n = 1, 2, \dots$) となることを次章で示す.

固有値アプローチは, 直観的には扱いやすいが, 固有値が求められない場合は, 適用不可能である. 例えば, O-U 過程については, 共分散関数の固有値を明示的に求めることができない. その理由については, 次章で説明する Fredholm 行列式の議論で明らかになるであろう. 次節では, O-U 過程の場合にも適用できる方法について説明する.

4.3 Girsanov アプローチ

本節では, 特性関数の導出が固有値アプローチでは不可能な統計量に対して, 導出可能な別のアプローチを考える. そのために, 次の Girsanov の定理を使う (Liptser-Shiryayev (1977)).

定理 4.3 区間 $[0, 1]$ 上で定義される 2 つの O-U 過程を

$$\begin{aligned} dX(t) &= -\alpha X(t) dt + dW(t) \\ dY(t) &= -\beta Y(t) dt + dW(t), \quad X(0) = Y(0) \end{aligned}$$

とする. ここで, $X(0) = Y(0)$ は $\{W(t)\}$ の増分と独立な確率変数あるいは定数である. また, $X = \{X(t)\}$ と $Y = \{Y(t)\}$ に誘導される $(C, \mathcal{B}(C))$ 上の確率測度を, それぞれ μ_X, μ_Y とする. すなわち,

$$\mu_X(A) = P(X \in A), \quad \mu_Y(A) = P(Y \in A), \quad A \in \mathcal{B}(C)$$

である．このとき， μ_X と μ_Y は同値であり，Radon-Nikodym の導関数は，

$$\frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(z) = \exp \left[(\beta - \alpha) \int_0^1 z(t) dz(t) + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \int_0^1 z^2(t) dt \right]$$

で与えられる．ここで， $z \in C$ ($z(0) = 0$) である．

Girsanov の定理は，ある確率過程 X が誘導する測度から，別の確率過程 Y が誘導する測度への変換公式を与えるものであり，この定理に基づいて特性関数を求める方法を Girsanov アプローチと呼ぶことにする．このとき， X の汎関数 $g(X)$ の期待値は，

$$E(g(X)) = E \left[g(Y) \frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(Y) \right]$$

により計算することが可能になる．ただし，左辺の期待値は μ_X ，右辺の期待値は μ_Y に関するものである．

(例 4.4) 以下では，Girsanov アプローチが適切である代表的な例として，次の統計量を考えよう．

$$S_4 = \int_0^1 X^2(t) dt, \quad X(t) = \kappa e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s) \quad (39)$$

ここで， $\{X(t)\}$ は， $X(0) = \kappa$ (定数) から出発する O-U 過程である．

式 (39) の S_4 の積率母関数 $m_4(\theta)$ は，O-U 過程 $X = \{X(t)\}$ の汎関数の期待値となる．したがって， $m_4(\theta) = E(h(X))$ として，Girsanov の定理の中で定義した O-U 過程 $\{Y(t)\}$ への変換を考えると，

$$\begin{aligned} m_4(\theta) &= E \left[\exp \left\{ \theta \int_0^1 X^2(t) dt \right\} \right] = E(h(X)) = E \left[h(Y) \frac{d\mu_X}{d\mu_Y}(Y) \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ \left(\theta + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \right) \int_0^1 Y^2(t) dt + (\beta - \alpha) \int_0^1 Y(t) dY(t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

を得る．

式 (40) の最右辺において，パラメータ β は，補助的に定義した O-U 過程 $\{Y(t)\}$ の係数パラメータであるから，その値を自由に設定することができる．ここでは， $\theta + (\beta^2 - \alpha^2)/2 = 0$ ，すなわち， $\beta = \sqrt{\alpha^2 - 2\theta}$ となるように選べば，次の結果を得る．

$$m_4(\theta) = E \left[\exp \left\{ (\beta - \alpha) \int_0^1 Y(t) dY(t) \right\} \right] = E \left[\exp \left\{ \frac{\beta - \alpha}{2} (Y^2(1) - \kappa^2 - 1) \right\} \right]$$

最後の等号は，第 2 章で述べた Ito 解析の結果による．さらに，

$$Y(t) = \kappa e^{-\beta t} + e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW(s)$$

であることから， $Y(1)$ の分布は，

$$Y(1) = \kappa e^{-\beta} + e^{-\beta} \int_0^1 e^{\beta s} dW(s) \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \left(\mu = \kappa e^{-\beta}, \quad \sigma^2 = \frac{1 - e^{-2\beta}}{2\beta} \right)$$

となり，次の結果を得る．

$$\begin{aligned} m_4(\theta) &= \exp \left[\frac{\alpha - \beta}{2} \left(\kappa^2 + 1 - \frac{\mu^2}{1 - (\beta - \alpha)\sigma^2} \right) \right] [1 - (\beta - \alpha)\sigma^2]^{-1/2} \\ &= \exp \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\kappa^2 \theta (\sinh \beta / \beta)}{\cosh \beta + \alpha (\sinh \beta / \beta)} \right] \left[\cosh \beta + \alpha \frac{\sinh \beta}{\beta} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

以上から， S_4 の特性関数は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \phi_4(\theta) &= m_4(i\theta) = E \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 X^2(t) dt \right\} \right] \\ &= \exp \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{i\kappa^2 \theta (\sin \nu / \nu)}{\cos \nu + \alpha (\sin \nu / \nu)} \right] \left[\cos \nu + \alpha \frac{\sin \nu}{\nu} \right]^{-1/2} \quad (\nu = \sqrt{2i\theta - \alpha^2}) \quad (41) \end{aligned}$$

上記の結果において， $\alpha = 0$ とすれば，

$$X(t) = \kappa + W(t) \iff dX(t) = dW(t), \quad X(0) = \kappa$$

となり，(41) から，

$$E \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 (W(t) + \kappa)^2 dt \right\} \right] = \exp \left\{ i\kappa^2 \theta \frac{\tan \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right\} (\cos \sqrt{2i\theta})^{-1/2}$$

を得る．さらに， $\alpha = \kappa = 0$ とすれば，式 (39) の S_4 は前節の式 (14) で定義された S_1 となり，式 (41) の結果は前節の固有値アプローチで得られた結果と一致することを確認されたい．

なお，ここでの結果は，初期値 $X(0)$ を定数であると仮定したが，確率変数とする場合にも，同様に考えることができる（問題 10）．

(例 4.5) 同様にして， $\{X(t)\}$ を式 (39) で定義した O-U 過程とするととき，次の統計量

$$S_5 = \int_0^1 \left(X(t) - \int_0^1 X(s) ds \right)^2 dt = \int_0^1 X^2(t) dt - \left(\int_0^1 X(s) ds \right)^2 \quad (42)$$

の積率母関数 $m_5(\theta)$ を計算しよう．まず，次のことが成り立つ（問題 11）．

$$m_5(\theta) = E \left[\exp \left\{ \frac{\beta - \alpha}{2} (Y^2(1) - \kappa^2 - 1) - \theta \left(\int_0^1 Y(t) dt \right)^2 \right\} \right]$$

ここで， $\beta = \sqrt{\alpha^2 - 2\theta}$ である．また，

$$Y(1) = \kappa e^{-\beta} + e^{-\beta} \int_0^1 e^{\beta u} dW(u), \quad \int_0^1 Y(t) dt = \frac{\kappa(1 - e^{-\beta})}{\beta} + \int_0^1 \frac{1 - e^{-\beta(1-u)}}{\beta} dW(u)$$

であることから， $(X, Y)' \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ となる．ただし，

$$\begin{aligned} X &= Y(1), \quad Y = \int_0^1 Y(t) dt, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \kappa e^{-\beta} \\ \frac{\kappa(1 - e^{-\beta})}{\beta} \end{pmatrix} \\ \Sigma &= \begin{pmatrix} (1 - e^{-2\beta})/(2\beta) & (1 - 2e^{-\beta} + e^{-2\beta})/(2\beta^2) \\ (1 - 2e^{-\beta} + e^{-2\beta})/(2\beta^2) & (2\beta - 3 + 4e^{-\beta} - e^{-2\beta})/(2\beta^3) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である．このことから， $\Lambda = \text{diag}((\beta - \alpha)/2, -\theta)$ とすれば，

$$\begin{aligned}
m_5(\theta) &= E \left[\exp \left\{ \frac{\beta - \alpha}{2} (X^2 - \kappa^2 - 1) - \theta Y^2 \right\} \right] \\
&= \exp \left[\frac{1}{2} \left\{ (\kappa^2 + 1)(\alpha - \beta) + \boldsymbol{\mu}' \Sigma^{-1} \left((I_2 - 2\Sigma\Lambda)^{-1} - I_2 \right) \boldsymbol{\mu} \right\} \right] |I_2 - 2\Sigma\Lambda|^{-1/2} \\
&= \exp \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha^2 \kappa^2 \theta}{g(\theta)} \left\{ \frac{1}{\beta^2} \frac{\sinh \beta}{\beta} - \frac{2}{\beta^4} (\cosh \beta - 1) \right\} \right] (g(\theta))^{-1/2}
\end{aligned} \tag{43}$$

を得る．ここで，

$$g(\theta) = \frac{\alpha^3 - 2\theta \sinh \beta}{\beta^2} + \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{4\alpha\theta}{\beta^4} \right) \cosh \beta + \frac{4\alpha\theta}{\beta^4}$$

である．特に， $\alpha = \kappa = 0$ とすれば，上の結果は，

$$E \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right)^2 dt \right\} \right] = \left(\frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2}$$

となる．この結果は，すでに前節で得られたものである．また，初期値 $X(0)$ が確率変数の場合にも．同様に考えることができる（問題 12）．

今までの議論は，ベクトル値確率過程を含む統計量の特性関数を求める場合に拡張することができる．

(例 4.6) ベクトル値 B_m を含む次の統計量を考えよう．

$$S_6 = \int_0^1 \mathbf{W}'(t) H \mathbf{W}(t) dt \tag{44}$$

ここで， $\{\mathbf{W}(t)\}$ は， q 次元 B_m である．また， H は， q 次の対称行列である．このとき，直交行列 P が存在して， $PHP' = \Lambda$ （対角）とすることができる． Λ の対角要素 $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ は， H の固有値である．また， $\{P\mathbf{W}(t)\}$ も， q 次元 B_m となる．したがって，

$$S_6 = \int_0^1 (P\mathbf{W}(t))' PHP' (P\mathbf{W}(t)) dt \stackrel{D}{=} \int_0^1 \mathbf{W}'(t) \Lambda \mathbf{W}(t) dt = \sum_{j=1}^q \lambda_j \int_0^1 W_j^2(t) dt$$

と表すことができる．このことから，

$$\begin{aligned}
E \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 \mathbf{W}'(t) H \mathbf{W}(t) dt \right\} \right] &= \prod_{j=1}^q E \left[\exp \left\{ i\lambda_j \theta \int_0^1 W_j^2(t) dt \right\} \right] \\
&= \prod_{j=1}^q \left(\cos \sqrt{2i\lambda_j \theta} \right)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{45}$$

を得る．

(例 4.7) ベクトル値確率過程と Ito 積分を含むような場合についても考えてみよう．まず， H を q 次の対称行列として，次の統計量を考えよう．

$$S_7 = \int_0^1 \mathbf{W}'(t) H d\mathbf{W}(t) \tag{46}$$

このとき，上の場合と同様にして，次の表現が得られる

$$\begin{aligned} S_7 &= \int_0^1 (P\mathbf{W}(t))' P H P' d(P\mathbf{W}(t)) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{j=1}^q \lambda_j \int_0^1 W_j(t) dW_j(t) = \sum_{j=1}^q \frac{\lambda_j}{2} (W_j^2(1) - 1) \end{aligned}$$

したがって，次のことが成り立つ．

$$\mathbb{E} \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 \mathbf{W}'(t) H d\mathbf{W}(t) \right\} \right] = \exp \left\{ -\frac{i\theta}{2} \text{tr}(H) \right\} \prod_{j=1}^q (1 - i\lambda_j \theta)^{-1/2}$$

上の例は，行列 H が対称の場合であったが， H が対称でない場合の簡単な例を 2 つ考えよう．

(例 4.8) まず，次の例を考えよう．

$$S_8 = \int_0^1 W_1(t) dW_2(t) = \int_0^1 \mathbf{W}'(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} d\mathbf{W}(t) \quad (47)$$

このとき， $\{W_1(t)\}$ を与えたときの S_8 の条件付き分布は，

$$S_8 | \{W_1(t)\} \sim N \left(0, \int_0^1 W_1^2(t) dt \right)$$

となる．期待値の繰り返しの公式から，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{i\theta S_8}) &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\exp \left\{ i\theta \int_0^1 W_1(t) dW_2(t) \right\} \middle| \{W_1(t)\} \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 W_1^2(t) dt \right\} \right] \end{aligned}$$

となるから，結局，

$$\mathbb{E}(e^{i\theta S_8}) = \left(\cos \sqrt{-\theta^2} \right)^{-1/2} = (\cosh \theta)^{-1/2}$$

を得る．

(例 4.9) もう 1 つの例は，Lévy の確率面積と呼ばれるもので，

$$S_9 = \frac{1}{2} \int_0^1 [W_1(t) dW_2(t) - W_2(t) dW_1(t)] = \int_0^1 \mathbf{W}'(t) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} d\mathbf{W}(t) \quad (48)$$

で定義される． $\{W_1(t)\}$ を与えたときの S_9 の条件付き分布は，平均 0，分散

$$\mathbb{E} [S_9^2 | \{W_1(t)\}] = \int_0^1 \left(W_1(t) - \frac{1}{2} W_1(1) \right)^2 dt$$

の正規分布である．このことから，次の結果を得る（問題 13）．

$$\mathbb{E}(e^{i\theta S_9}) = \mathbb{E} \left[\exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 \left(W_1(t) - \frac{1}{2} W_1(1) \right)^2 dt \right\} \right] = \left(\cosh \frac{\theta}{2} \right)^{-1}$$

Girsanov アプローチは，比の形の統計量も扱うことができる．

(例 4.10) 比の形の統計量として，次の例を考えよう．

$$S_{10} = \frac{\int_0^1 X(t) dX(t)}{\int_0^1 X^2(t) dt} = \frac{U}{V}, \quad dX(t) = -cX(t)dt + dW(t), \quad X(0) = 0 \quad (49)$$

S_{10} は，第 3 章 6 節で議論したランダム・ウォーク近接モデルにおける係数推定量の極限分布に関連した確率変数であり，その分布関数は，次の公式により計算できる (Imhof (1961)) ．

$$F(x) = P(S_{10} \leq x) = P(xV - U \geq 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \text{Im} [\phi(\theta; x)] d\theta \quad (50)$$

ここで， $\phi(\theta; x)$ は，

$$xV - U = x \int_0^1 X^2(t) dt - \int_0^1 X(t) dX(t) = x \int_0^1 X^2(t) dt - \frac{1}{2} (X^2(1) - 1)$$

の特性関数である．この場合にも，Girsanov アプローチにより，

$$\begin{aligned} \phi(-i\theta; x) &= E[\exp\{\theta(xV - U)\}] = E\left[\exp\left\{\theta\left(x \int_0^1 Z^2(t) dt - \int_0^1 Z(t) dZ(t)\right)\right\}\right] \\ &= E\left[\exp\left\{\left(\theta x + \frac{\beta^2 - c^2}{2}\right) \int_0^1 Y^2(t) dt + (\beta - c - \theta) \int_0^1 Y(t) dY(t)\right\}\right] \\ &= \exp\left(\frac{c + \theta - \beta}{2}\right) E\left[\exp\left\{\frac{\beta - c - \theta}{2} Y^2(1)\right\}\right] \\ &= \exp\left(\frac{c + \theta}{2}\right) \left[\cosh \beta + (c + \theta) \frac{\sinh \beta}{\beta}\right]^{-1/2} \end{aligned}$$

となる．ただし， $\beta = \sqrt{c^2 - 2\theta x}$ である．したがって，次の結果を得る．

$$\phi(\theta; x) = \exp\left(\frac{c + i\theta}{2}\right) \left[\cos \nu + (c + i\theta) \frac{\sin \nu}{\nu}\right]^{-1/2}, \quad \nu = \sqrt{2i\theta x - c^2} \quad (51)$$

実際に分布関数を計算するには，式 (50) に基づいて数値積分を行う必要がある．その方法については，第 6 章で詳しく述べることにする．

今までは，Girsanov アプローチが適用可能な例を示してきたが，例えば，次の統計量に対しては適用が困難である．

$$A = \int_0^1 t^{2\delta} W^2(t) dt \stackrel{D}{=} \int_0^1 \int_0^1 (st)^\delta \min(s, t) dW(s) dW(t), \quad (\delta > -1/2) \quad (52)$$

次章では，統計量 A を上のように Riemann-Stieltjes 重積分を使った表現に変換した上で，特性関数を導出する．なお，統計量 A は，重積分を使った次の別表現と同等であることに注意されたい．

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 t^{2\delta} \left(\int_0^t \int_0^t dW(u) dW(v) \right) dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\max(u, v)}^1 t^{2\delta} dt \right) dW(u) dW(v) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2\delta + 1} [1 - (\max(s, t))^{2\delta+1}] dW(s) dW(t) \end{aligned} \quad (53)$$

Girsanov アプローチが適用不可能なもう 1 つの例として , Ito 積分を含む統計量を考えよう .

$$B = \int_0^1 t^\tau W(t) dW(t) \quad (\tau > 0) \quad (54)$$

この場合も , 重積分表現に変換することを考える . 今 , $g(t)$ を微分可能な通常関数とすると , Ito 解析より , 次のことが成り立つ .

$$d(g(t) W^2(t)) = 2g(t)W(t) dW(t) + (g'(t)W^2(t) + g(t)) dt \quad (55)$$

したがって ,

$$\int_0^1 g(t)W(t) dW(t) = \frac{1}{2} \left[g(1) W^2(1) - \int_0^1 (g'(t)W^2(t) + g(t)) dt \right]$$

となる . さらに , ここで ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 g'(t)W^2(t) dt &= \int_0^1 g'(t) \left(\int_0^t \int_0^t dW(u)dW(v) \right) dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{\max(u,v)}^1 g'(t) dt \right) dW(u)dW(v) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [g(1) - g(\max(s,t))] dW(s)dW(t) \\ &= g(1)W^2(1) - \int_0^1 \int_0^1 g(\max(s,t)) dW(s)dW(t) \end{aligned}$$

となるので , 次の結果を得る .

$$\int_0^1 g(t)W(t) dW(t) = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \int_0^1 g(\max(s,t)) dW(s)dW(t) - \int_0^1 g(t) dt \right] \quad (56)$$

以上より , $g(t) = t^\tau$ として , 次のことが成り立つ .

$$B = \int_0^1 t^\tau W(t) dW(t) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (\max(s,t))^\tau dW(s)dW(t) - \frac{1}{2(\tau+1)} \quad (57)$$

次章で説明する Fredholm アプローチでは , この最後の右辺の表現の特性関数を導出する .

第 4 章 練習問題

1. 次の関係が成り立つことを示せ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right)^2 dt &= \int_0^1 \int_0^1 [\min(s, t) - st] dW(s) dW(t) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - \max(s, t) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right] dW(s) dW(t) \end{aligned}$$

2. 次の関係が成り立つことを示せ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 (W(t) - t W(1))^2 dt &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{3} - \max(s, t) + \frac{1}{2}(s^2 + t^2) \right] dW(s) dW(t) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 [\min(s, t) - st] dW(s) dW(t) \end{aligned}$$

3. 次の差分方程式

$$D_T(\theta) - (2 - a)D_{T-1}(\theta) + D_{T-2}(\theta) = 0, \quad D_1(\theta) = 1 - a, \quad D_2(\theta) = a^2 - 3a + 1$$

の解は , 次のように与えられることを示せ .

$$D_T(\theta) = \cos T\omega - \frac{a \sin T\omega}{2 \sin \omega}, \quad \omega = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2 - a}$$

4. 次の関数

$$m_{1T}(\theta) = \left(\cos T\omega - \frac{a \sin T\omega}{2 \sin \omega} \right)^{-1/2}, \quad \omega = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4a - a^2}}{2 - a}$$

は , $T \rightarrow \infty$ のとき , 次のように展開されることを示せ .

$$m_{1T}(\theta) = \left(\cos \sqrt{2\theta} \right)^{-1/2} \left[1 - \frac{\theta}{8T^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2\theta}}{3} \tan \sqrt{2\theta} \right) \right] + O\left(\frac{1}{T^3}\right)$$

5. (j, k) 要素が $T + 1 - \max(j, k)$ であるような $T \times T$ 行列の固有値は , 次のように与えられることを示せ .

$$\lambda_j = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{j - 1/2}{2T + 1} \pi \right)^{-2} \quad (j = 1, \dots, T)$$

6. 次の確率収束が成り立つことを示せ . ただし , λ_j は , 問題 5 で定義された値である .

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^T \lambda_j \varepsilon_j^2 - \sum_{j=1}^T \frac{\varepsilon_j^2}{(j - 1/2)^2 \pi^2} \right) = 0, \quad \{\varepsilon_j\} \sim \text{NID}(0, 1)$$

7. (j, k) 要素が $T - \max(j, k) - (T - j)(T - k)/T$ であるような $(T - 1) \times (T - 1)$ 行列を A_{T-1} とするとき, 次のことが成り立つことを示せ.

$$A_{T-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |A_{T-1}^{-1}| = T$$

また, A_{T-1} の固有値は,

$$\xi_j = \frac{1}{4} \left(\sin \frac{j\pi}{2T} \right)^{-2} \quad (j = 1, \dots, T-1)$$

で与えられることを示せ.

8. 次のことが成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} m_{2T}(\theta) &= \left| I_{T-1} - \frac{2\theta}{T^2} A_{T-1} \right|^{-1/2} = \left[\frac{1}{T} \left(\cos(T-1)\lambda + \frac{(2-b)\sin(T-1)\lambda}{2\sin\lambda} \right) \right]^{-1/2} \\ &= \left(\frac{\sin\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}} \right)^{-1/2} \left[1 - \frac{\theta}{8T^2} \left(1 + \frac{\sqrt{2\theta}}{3} \cot\sqrt{2\theta} \right) \right] + O\left(\frac{1}{T^3}\right) \end{aligned}$$

ただし, A_{T-1}^{-1} は, 問題 7 で与えられた行列である. また, b と λ は, 次の通りである.

$$b = \frac{2\theta}{T^2}, \quad \lambda = \tan^{-1} \frac{\sqrt{4b - b^2}}{2 - b}$$

9. 次の確率収束が成り立つことを示せ. ただし, ξ_j は, 問題 7 で定義された値である.

$$\text{plim}_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T^2} \sum_{j=1}^{T-1} \xi_j^2 \varepsilon_{j+1}^2 - \sum_{j=1}^{T-1} \frac{\varepsilon_{j+1}^2}{j^2 \pi^2} \right) = 0$$

10. 次の O-U 過程を考える.

$$X(t) = X(0) e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW(s)$$

ここで, α は正の定数, $X(0) \sim N(0, 1/(2\alpha))$ で Bm の増分とは独立のとき, 統計量 $\int_0^1 X^2(t) dt$ の積率母関数を求めよ.

11. 確率変数 X と Y を

$$X = e^{-\beta} \int_0^1 e^{\beta u} dW(u), \quad Y = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\beta(1-u)}}{\beta} dW(u)$$

で定義するとき, 共分散行列は次のようになることを示せ.

$$\Sigma = \begin{pmatrix} (1 - e^{-2\beta})/(2\beta) & (1 - 2e^{-\beta} + e^{-2\beta})/(2\beta^2) \\ (1 - 2e^{-\beta} + e^{-2\beta})/(2\beta^2) & (2\beta - 3 + 4e^{-\beta} - e^{-2\beta})/(2\beta^3) \end{pmatrix}$$

12. 問題 10 と同一の O-U 過程 $\{X(t)\}$ に対して, 次の統計量 S の積率母関数を求めよ.

$$S = \int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 W(s) ds \right)^2 dt$$

13. Lévy の確率面積

$$S = \frac{1}{2} \int_0^1 [W_1(t) dW_2(t) - W_2(t) dW_1(t)]$$

に対して, 次のことを示せ.

$$E[S^2 | \{W_1(t)\}] = \int_0^1 \left(W_1(t) - \frac{1}{2}W_1(1) \right)^2 dt$$

$$E(e^{i\theta S}) = E \left[\exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 \left(W_1(t) - \frac{1}{2}W_1(1) \right)^2 dt \right\} \right] = \left(\cosh \frac{\theta}{2} \right)^{-1}$$