第 4 章「ＡＲＭＡモデルの推定」

１．Box-Jenkins によるモデル・ビルディングの方法

(1) Identification (同定，特定化)
⇒ (2) Estimation (推定)
⇒ (3) Diagnostic Checking (診断)

(1) Identification: ARMA(p,q) モデルの次数 p, q を決める．標本自己相関，標本偏自己相関，標本逆自己相関などを手がかりとする．

(2) Estimation: ARMA(p,q) モデルのパラメータの推定

$$\phi(L)y_t = m + \theta(L)\varepsilon_t$$

におけるパラメータ：

$$\begin{aligned}\phi &= (\phi_1,\ \cdots,\ \phi_p)' \\ \theta &= (\theta_1,\ \cdots,\ \theta_q)' \\ m &= \text{定数項} \\ \sigma^2 &= \text{誤差項 } \varepsilon_t \text{ の分散}\end{aligned}$$

推定量

・非線形最小 2 乗推定量（NLSE)

$$\sum \varepsilon_t^2 = \sum \left\{ \frac{\phi(L)y_t - m}{\theta(L)} \right\}^2 \quad \text{を最小にする}$$

Note. モデルが AR(p) の場合は，通常の最小 2 乗法となる．σ^2 は残差から推定．

・最尤推定量（MLE）

誤差項に正規分布を仮定して，次の対数尤度関数（密度関数の対数）を最大化する．

$$\text{対数尤度} = -\frac{T}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\log|\Sigma| - \frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)'\Sigma^{-1}(y-\mu)$$

これらの推定量は次の性質をもつ．

定理１ 定常，反転可能な ARMA モデルにおいては，パラメータ ϕ, θ, m の NLSE および MLE は，漸近的に（標本サイズ T が大きくなるにつれて）正規分布に従い，

$$\sqrt{T}(\text{推定量のベクトル} - \text{真の値のベクトル}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}(0, W^{-1})$$

ここで，W は Fisher の情報行列であり，

$$W = \lim_{T\to\infty} E\left[-\frac{1}{T}\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta'}\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2 \right\}\right], \quad \beta = (\phi', \theta', m)'$$

例１：　AR(1) モデル $y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ の場合

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \Rightarrow \mathrm{N}(0, W^{-1})\,, \quad \beta = (\phi_1, m)'$$

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{T\to\infty} E\left[-\frac{1}{T}\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta'}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}(y_t - m - \phi_1 y_{t-1})^2\right\}\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}E\begin{pmatrix}\sum y_{t-1}^2 & \sum y_{t-1} \\ \sum y_{t-1} & T\end{pmatrix} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}\begin{pmatrix}T(\gamma_0 + \mu^2) & T\mu \\ T\mu & T\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix}\gamma_0 + \mu^2 & \mu \\ \mu & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ここで，

$$\gamma_0 = V(y_t) = \frac{\sigma^2}{1 - \phi_1^2}, \quad \mu = E(y_t) = \frac{m}{1 - \phi_1}$$

これより，

$$W^{-1} = \begin{pmatrix}1 - \phi_1^2 & -(1 - \phi_1^2)\mu \\ -(1 - \phi_1^2)\mu & \sigma^2 + (1 - \phi_1^2)\mu^2\end{pmatrix}$$

例２： MA(1) モデル $y_t = m + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}$ の場合

$$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \Rightarrow \mathrm{N}(0, W^{-1})\,, \quad \beta = (\theta_1, m)'$$

$$\begin{aligned}
W &= \lim_{T\to\infty} E\left[-\frac{1}{T}\frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta'}\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\right\}\right] \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}E\begin{pmatrix}\sum\left(\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta_1}\right)^2 + \varepsilon_t\frac{\partial^2\varepsilon_t}{\partial\theta_1^2}\right) & \sum\left(\varepsilon_t\frac{\partial^2\varepsilon_t}{\partial m} + \frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta_1}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial m}\right) \\ \sum\left(\varepsilon_t\frac{\partial^2\varepsilon_t}{\partial m} + \frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta_1}\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial m}\right) & \sum\left(\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial m}\right)^2 + \varepsilon_t\frac{\partial^2\varepsilon_t}{\partial m^2}\right)\end{pmatrix} \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T\sigma^2}E\begin{pmatrix}\sum\left(\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial\theta_1}\right)^2\right) & 0 \\ 0 & \sum\left(\left(\frac{\partial\varepsilon_t}{\partial m}\right)^2\right)\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix}V\left(\frac{\varepsilon_{t-1}}{1-\theta_1 L}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\theta_1)^2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{1-\theta_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2(1-\theta_1)^2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

これより，

$$W^{-1} = \begin{pmatrix}1 - \theta_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2(1 - \theta_1)^2\end{pmatrix}$$

(3) Diagnostic Checking: 推定された ARMA モデルの適合度診断

・残差の自己相関の有無の検定

$$\text{残差：}\quad \hat{\varepsilon}_t = \frac{\hat{\phi}(L)y_t - \hat{m}}{\hat{\theta}(L)}$$

$$\text{残差の自己相関：}\quad \hat{r}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^{T} \hat{\varepsilon}_{t-h}\hat{\varepsilon}_t}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

モデルの特定化がよければ，各時差 h に対して

$$\hat{r}_h \quad \rightarrow \quad \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{T}\right)$$

したがって，有意水準 5% で無相関が受容される受容域は，

$$\left[-1.96 \times \frac{1}{\sqrt{T}},\ 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{T}}\right]$$

・Portmanteau tests：複数の時差の自己相関の有無をまとめて検定

$$Q \;=\; T \times \sum_{h=1}^{K} \hat{r}_h^2 : \quad \textbf{Box-Pierce 統計量}$$

$$\tilde{Q} \;=\; T(T+2) \times \sum_{h=1}^{K} \frac{1}{T-h}\hat{r}_h^2 : \quad \textbf{Ljung-Box 統計量}$$

無相関の帰無仮説のもとで，Q も $\tilde{Q}$ も漸近的に自由度 $K-p-q$ の χ^2 分布にしたがうことから，これらの値が大きいときに無相関の仮説を棄却する．

・AIC (Akaike's Information Criterion): 赤池情報量基準

$$AIC(p,q) = -2 \times \text{対数尤度の最大値} + 2(p+q)$$

を最小にする p と q の組合せからなる ARMA(p,q) モデルを最適なものとして選択する．

Note. AIC(p,q) の右辺第 2 項は，パラメータ数 p, q を増やす（モデルを複雑にする）ことに対するペナルティーである．

例３： 時系列 $\{y_t\}$ の DGP (Data Generating Process: データ生成過程) を AR(3) 過程

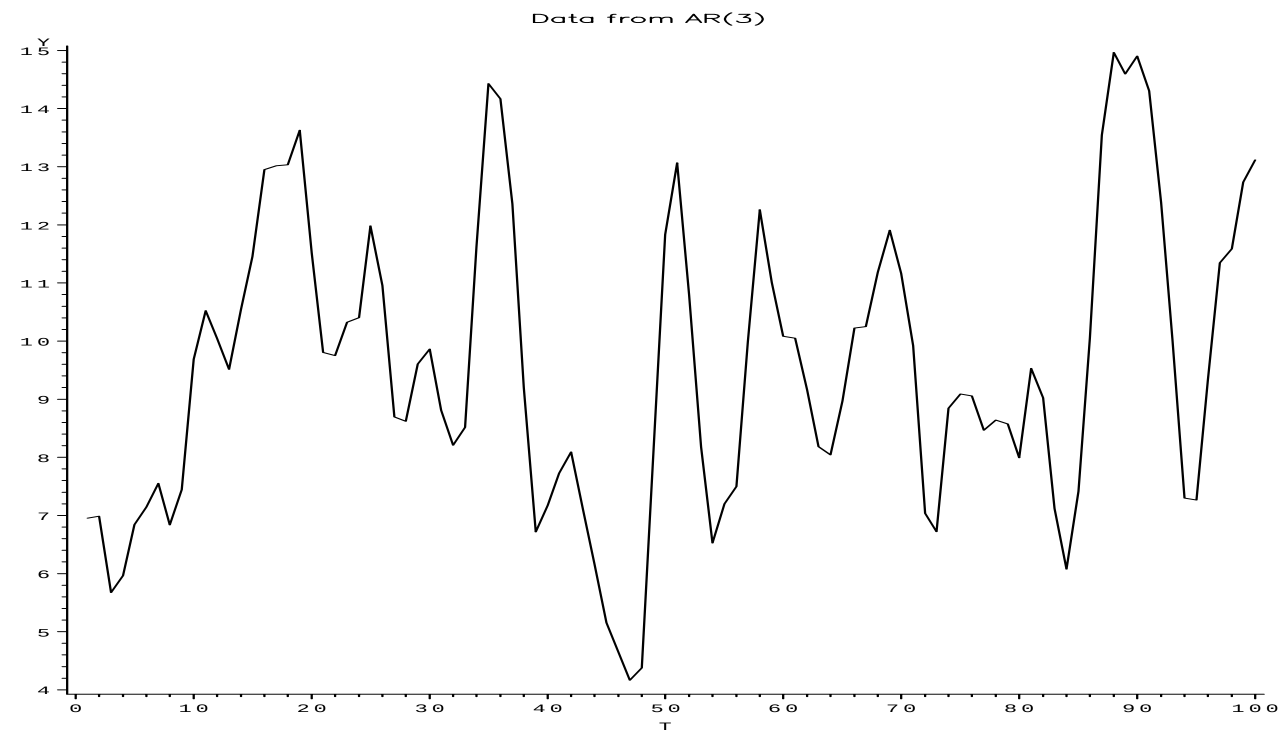
$$y_t = m + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \phi_3 y_{t-3} + \varepsilon_t$$

$$m = 1.5, \quad \phi_1 = 1.55, \quad \phi_2 = -1.1, \quad \phi_3 = 0.4, \quad \sigma^2 = 1$$

とする．この DGP からの 100 個のデータは次の通りである．

6.954	6.986	5.676	5.963	6.841	7.145	7.554	6.836	7.443
9.687	10.525	10.045	9.513	10.548	11.453	12.950	13.017	13.033
13.628	11.518	9.806	9.751	10.324	10.403	11.980	10.957	8.693
8.619	9.603	9.864	8.811	8.208	8.516	11.626	14.430	14.169
12.359	9.201	6.717	7.176	7.728	8.094	7.096	6.164	5.153
4.646	4.165	4.377	8.199	11.834	13.067	10.794	8.178	6.524
7.198	7.499	9.984	12.259	11.009	10.084	10.049	9.159	8.185
8.041	8.971	10.223	10.249	11.185	11.905	11.165	9.920	7.036
6.723	8.843	9.088	9.057	8.467	8.639	8.574	7.993	9.530
9.024	7.118	6.079	7.416	10.048	13.544	14.964	14.595	14.902
14.305	12.382	10.006	7.298	7.267	9.332	11.348	11.587	12.735
13.118								

$y_t = 1.5 + 1.55y_{t-1} - 1.1y_{t-2} + 0.4y_{t-3} + \varepsilon_t$ からのデータ (T=100)




```
                    ARIMA Procedure

               Name of variable = Y.
               Mean of working series =   9.5265
               Standard deviation     = 2.495326
               Number of observations =      100

                    Autocorrelations

Lag Covar   Corr     -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
  0 6.22665 1.00000  |                    |********************|
```

```
 1  5.0705 0.81432  |                .   |****************    |
 2 2.87933 0.46242  |              .     |*********           |
 3 0.93717 0.15051  |             .      |***   .             |
 4 -0.1939 -.03114  |             .     *|      .             |
 5 -0.4237 -.06804  |             .     *|      .             |
 6  -0.165 -.02650  |             .     *|      .             |
 7 0.18352 0.02947  |             .      |*     .             |
 8 0.35806 0.05750  |             .      |*     .             |
 9 0.28222 0.04532  |             .      |*     .             |
10 -0.0769 -.01235  |             .      |      .             |
11 -0.5571 -.08946  |             .    **|      .             |
12 -1.0289 -.16523  |             .   ***|      .             |
13  -1.375 -.22083  |             .  ****|      .             |
14 -1.3197 -.21194  |             .  ****|      .             |
15 -0.8773 -.14089  |             .   ***|      .             |
16 -0.3902 -.06267  |             .     *|      .             |
17 -0.1233 -.01980  |             .      |      .             |
18 -0.0514 -.00825  |             .      |      .             |
19 -0.0908 -.01459  |             .      |      .             |
20 -0.2099 -.03371  |             .     *|      .             |
21 -0.3357 -.05391  |             .     *|      .             |
22 -0.5052 -.08114  |             .    **|      .             |
23 -0.5076 -.08152  |             .    **|      .             |
24 -0.5018 -.08059  |             .    **|      .             |
                           "." marks two standard errors

                    Inverse Autocorrelations

    Lag Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
      1   -0.78460  |    ****************|   .                |
      2    0.43806  |                .   |*********           |
      3   -0.26756  |               *****|   .                |
      4    0.22597  |                .   |*****               |
      5   -0.17575  |                ****|   .                |
      6    0.12995  |                .   |***.                |
      7   -0.12302  |                . **|   .                |
      8    0.12583  |                .   |***.                |
      9   -0.11133  |                . **|   .                |
     10    0.08006  |                .   |** .                |
     11   -0.04236  |                .  *|   .                |
     12    0.02928  |                .   |*  .                |
     13   -0.06218  |                .  *|   .                |
     14    0.10811  |                .   |** .                |
     15   -0.09698  |                . **|   .                |
     16    0.07311  |                .   |*  .                |
     17   -0.10064  |                . **|   .                |
     18    0.15670  |                .   |***.                |
     19   -0.19502  |                ****|   .                |
```

```
 20    0.22982   |               .   |*****              |
 21   -0.26586   |              *****|   .               |
 22    0.24703   |               .   |*****              |
 23   -0.14868   |               .***|   .               |
 24    0.04470   |               .   |*  .               |

                 Partial Autocorrelations

Lag Correlation -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
  1    0.81432   |               .   |****************   |
  2   -0.59576   |       ************|   .               |
  3    0.15992   |               .   |***.               |
  4    0.00141   |               .   |   .               |
  5    0.10376   |               .   |** .               |
  6   -0.05570   |               .  *|   .               |
  7    0.03900   |               .   |*  .               |
  8   -0.03453   |               .  *|   .               |
  9   -0.00957   |               .   |   .               |
 10   -0.11892   |               . **|   .               |
 11   -0.01098   |               .   |   .               |
 12   -0.11374   |               . **|   .               |
 13   -0.03743   |               .  *|   .               |
 14    0.08720   |               .   |** .               |
 15    0.00033   |               .   |   .               |
 16   -0.07493   |               .  *|   .               |
 17   -0.01851   |               .   |   .               |
 18    0.05599   |               .   |*  .               |
 19   -0.01695   |               .   |   .               |
 20   -0.05514   |               .  *|   .               |
 21   -0.00812   |               .   |   .               |
 22   -0.08410   |               . **|   .               |
 23    0.10313   |               .   |** .               |
 24   -0.20928   |               ****|   .               |

           Autocorrelation Check for White Noise

 To   Chi                    Autocorrelations
Lag  Square DF   Prob
  6   93.64  6  0.000  0.814  0.462  0.151 -0.031 -0.068 -0.027
 12   98.43 12  0.000  0.029  0.058  0.045 -0.012 -0.089 -0.165
 18  112.39 18  0.000 -0.221 -0.212 -0.141 -0.063 -0.020 -0.008
 24  115.55 24  0.000 -0.015 -0.034 -0.054 -0.081 -0.082 -0.081
```

（１）AR(2) モデルをあてはめた場合

```
           Conditional Least Squares Estimation

                              Approx.
```

```
Parameter   Estimate    Std Error   T Ratio  Lag
MU           9.27155     0.37726     24.58    0
AR1,1        1.35004     0.07970     16.94    1
AR1,2       -0.63254     0.08027     -7.88    2

Constant Estimate  =  2.6191349
Variance  Estimate = 1.25947614
Std Error Estimate = 1.12226385
AIC                = 309.811373*
SBC                = 317.626884*
Number of Residuals=        100
* Does not include log determinant.

          Correlations of the Estimates

  Parameter          MU       AR1,1       AR1,2

  MU              1.000      -0.079       0.025
  AR1,1          -0.079       1.000      -0.821
  AR1,2           0.025      -0.821       1.000

         Autocorrelation Check of Residuals

 To   Chi                  Autocorrelations
Lag  Square DF   Prob
  6    5.59  4  0.232  0.137 -0.092 -0.002 -0.001  0.135  0.086
 12    6.12 10  0.805  0.021 -0.004  0.055 -0.028 -0.005  0.021
 18   11.33 16  0.788 -0.124 -0.112 -0.011  0.066 -0.061 -0.086
 24   15.79 22  0.826 -0.010 -0.012  0.050 -0.173 -0.028  0.021

 Model for variable Y

 Estimated Mean = 9.27154639

 Autoregressive Factors
 Factor 1: 1 - 1.35 B**(1) + 0.63254 B**(2)
```

（２）AR(3) モデルをあてはめた場合

```
       Conditional Least Squares Estimation

                          Approx.
Parameter   Estimate    Std Error   T Ratio  Lag
MU           8.84347     0.50757     17.42    0
AR1,1        1.52247     0.10110     15.06    1
AR1,2       -0.97221     0.15740     -6.18    2
AR1,3        0.25667     0.10176      2.52    3
```

```
Constant Estimate  = 1.70736993
Variance  Estimate = 1.20463877
Std Error Estimate = 1.09756037
AIC                = 306.323481*
SBC                = 316.744162*
Number of Residuals=       100
* Does not include log determinant.

          Correlations of the Estimates

Parameter         MU      AR1,1      AR1,2      AR1,3

MU             1.000     -0.206      0.149     -0.176
AR1,1         -0.206      1.000     -0.867      0.632
AR1,2          0.149     -0.867      1.000     -0.866
AR1,3         -0.176      0.632     -0.866      1.000

         Autocorrelation Check of Residuals

 To   Chi                    Autocorrelations
Lag  Square DF   Prob
  6    1.39  3  0.708 -0.001 -0.020  0.060 -0.082  0.048  0.008
 12    3.06  9  0.962  0.001  0.006  0.109 -0.014  0.008  0.051
 18    5.83 15  0.982 -0.095 -0.074 -0.002  0.083 -0.037 -0.024
 24   11.47 21  0.953  0.035 -0.024  0.114 -0.163  0.024  0.036

     Model for variable Y

     Estimated Mean = 8.84346631

     Autoregressive Factors
     Factor 1: 1 - 1.5225 B**(1) + 0.97221 B**(2)
               - 0.25667 B**(3)
```

(参考１）例３ の AR(3) 系列生成のための SAS プログラム

```
filename out 'chap4-1.dat';    データの出力先を確保
data ar3;
do i=1 to 200;                全部で 200 個のデータ
e=rannor(2784322);            正規乱数の発生
lags=sum(1.55*lag1y,-1.1*lag2y,0.4*lag3y,e);
y=1.5+lags;
lag3y=lag2y;lag2y=lag1y;lag1y=y;
if i>100 then output;       後半の 100 個のみを取り出す
end;
data b;set ar3;
```

```
file out;put y f7.3; 小数点以下３桁でデータを chap4-1.dat に書き出す
```

(参考２）ARMA モデル分析のための SAS プログラム

```
options ls=65 ps=50;   出力サイズの設定（ls=列文字数，ps=行文字数）
filename in 'chap4-1.dat';   データの読み込み先を指定
filename graph 'chap4-1.ps';  グラフの出力先を確保
goptions device=pslepsfc gsfmode=replace gsfname=graph;グラフ環境の設定
goptions cback=yellow colors=(rose cyan yellow lilg rose);カラー指定
data ar3;infile in;input y;
t=_n_;
symbol i=join l=1 c=blue v=none;  描くグラフの内容を指定
proc gplot;plot y*t;                     GPLOT プロシージャ
title f=simplex h=1.5 'Data from AR(3)';  タイトルの指定
proc arima;                         ARIMA プロシージャ
  identify var=y;                   分析対象のデータ名を指定
  estimate p=2;                      AR(2) を推定
  estimate p=3;                      AR(3) を推定
```

(参考３）ARMA モデル分析のための SHAZAM プログラム

```
sample 1 100
read(chap4-1.dat) y    ファイル chap4-1.dat からデータ y を読みこむ
genr t=time(0)         時間 t=1,2, ... のデータを作成
arima y/plotac plotpac nowide              (identification)
arima y/nar=3 coef=beta resid=ry nowide     (estimation)
gen1 s=sqrt($sig2)                          予測
arima y/nar=3 coef=beta fbeg=100 fend=120 sigma=s predict=py resid=res
plot ry t /gnu lineonly device=postscript output=ar3.ps
                               残差のプロット
stop
```