

第 6 章「季節性を含む非定常な ARMA モデル」

1 . SARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)_S モデル

$$\phi(L)\Phi(L^S)(1-L)^d(1-L^S)^D y_t = m + \theta(L)\Theta(L^S)\varepsilon_t \quad (t = 1, 2, \dots, T) \quad (1)$$

ここで，S は周期 (period) を表す自然数，また，

$$\Phi(L^S) = 1 - \Phi_1 L^S - \Phi_2 L^{2S} - \dots - \Phi_P L^{PS},$$

$$\Theta(L^S) = 1 - \Theta_1 L^S - \Theta_2 L^{2S} - \dots - \Theta_Q L^{QS},$$

Note. 初期値 $y_j = 0$ ($j \leq 0$) . $1 - L^S$ は，S 期前との階差を取る季節階差オペレータ .

$$(1 - L^S)y_t = y_t - y_{t-S}, \quad (1 - L^S)^2 y_t = (1 - L^S)(y_t - y_{t-S}) = y_t - 2y_{t-S} + y_{t-2S}, \text{ etc.}$$

2 . SARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)_S モデルの h 期先予測

$\hat{y}_t(h)$: 時点 t までの観測値が与えられたときの y_{t+h} の BLUP

例 1 : SARIMA(0,1,1)×(0,1,1)₁₂ モデル

$$(1 - L)(1 - L^{12})y_t = (1 - \theta L)(1 - \Theta L^{12})\varepsilon_t \quad (2)$$

の場合は，

$$(1 - L)(1 - L^{12}) = 1 - L - L^{12} + L^{13},$$

$$(1 - \theta L)(1 - \Theta L^{12}) = 1 - \theta L - \Theta L^{12} + \theta\Theta L^{13},$$

であるから，

$$y_t = y_{t-1} + y_{t-12} - y_{t-13} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} - \Theta\varepsilon_{t-12} + \theta\Theta\varepsilon_{t-13},$$

$$y_{t+h} = y_{t+h-1} + y_{t+h-12} - y_{t+h-13} + \varepsilon_{t+h} - \theta\varepsilon_{t+h-1} - \Theta\varepsilon_{t+h-12} + \theta\Theta\varepsilon_{t+h-13},$$

を得る . したがって，

$$\begin{aligned} \hat{y}_t(h) &= \hat{y}_t(h-1) + \hat{y}_t(h-12) - \hat{y}_t(h-13) - \theta\hat{\varepsilon}_t(h-1) \\ &\quad - \Theta\hat{\varepsilon}_t(h-12) + \theta\Theta\hat{\varepsilon}_t(h-13) \end{aligned}$$

を得る . ただし，

$$\hat{y}_t(j) = \begin{cases} y_{t+j} & (j \leq 0) \\ \Pi(y_{t+j}|y_t, y_{t-1}, \dots, y_1) & (j > 0) \end{cases}$$

$$\hat{\varepsilon}_t(j) = \begin{cases} \varepsilon_{t+j} & (j \leq 0) \\ 0 & (j > 0) \end{cases}$$

3 . SARIMA(p,d,q)×(P,D,Q)_S モデルの推定

周期 S , 1 期前との階差の次数 d および季節階差の次数 D を与えて, $x_t = (1-L)^d(1-L^S)^D y_t$ を定常な ARMA(p,q) モデルと想定することにより, 以前の場合のように, 次の手続きに従う.

(1) Identification (同定, 特定化)

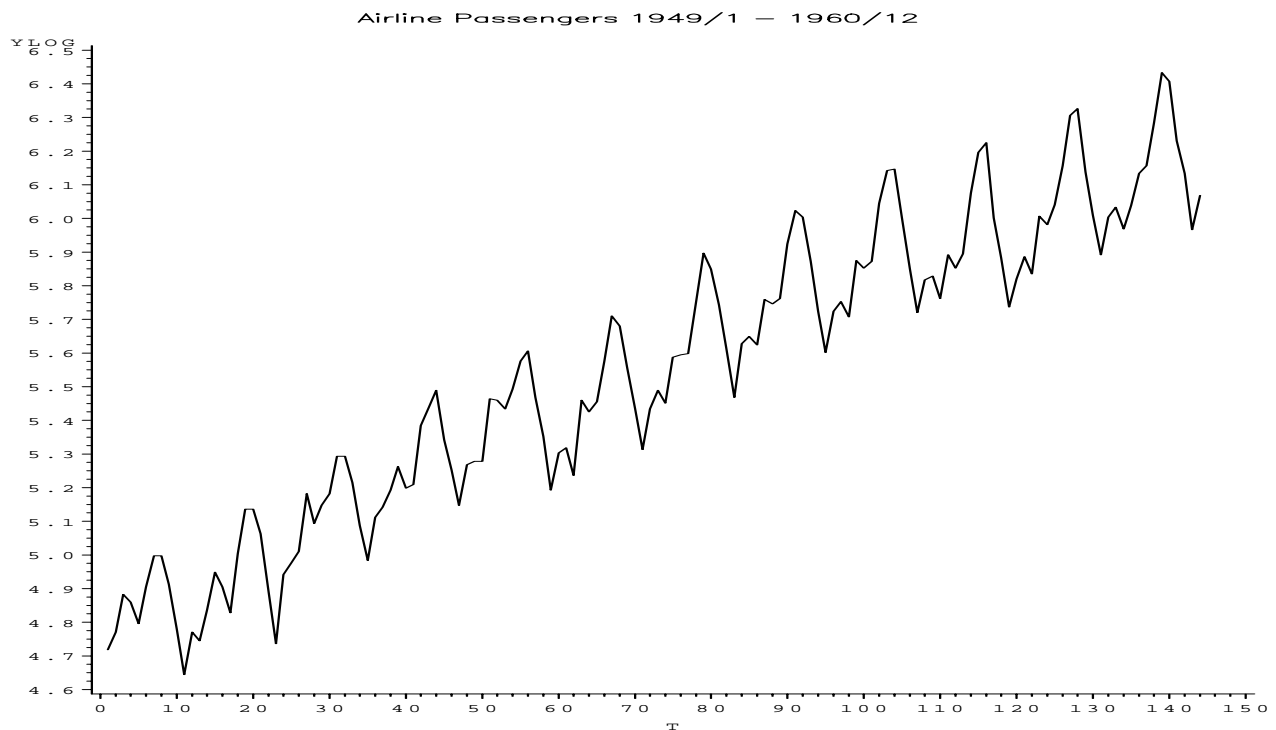
⇒ (2) Estimation (推定)

⇒ (3) Diagnostic Checking (診断)

例 2 : Airline Passengers 月次データ (1949/1-1960/12) 単位 : 1,000 人

112	118	132	129	121	135	148	148	136	119	104	118
115	126	141	135	125	149	170	170	158	133	114	140
145	150	178	163	172	178	199	199	184	162	146	166
171	180	193	181	183	218	230	242	209	191	172	194
196	196	236	235	229	243	264	272	237	211	180	201
204	188	235	227	234	264	302	293	259	229	203	229
242	233	267	269	270	315	364	347	312	274	237	278
284	277	317	313	318	374	413	405	355	306	271	306
315	301	356	348	355	422	465	467	404	347	305	336
340	318	362	348	363	435	491	505	404	359	310	337
360	342	406	396	420	472	548	559	463	407	362	405
417	391	419	461	472	535	622	606	508	461	390	432

国際線乗客数対数値データ



Airline Passengers 1949/1 - 1960/12

Name of variable = YLOG.

Period(s) of Differencing = 1,12.

Mean of working series = 0.000291

Standard deviation = 0.045673

Number of observations = 131

NOTE: The first 13 observations were eliminated by differencing.

Autocorrelations

Lag	Covar	Corr	-1	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
0	0.00209	1.00000												*****									
1	-0.0007	-.34112								*****		.											
2	0.00022	0.10505								.	**	.											
3	-0.0004	-.20214								****		.											
4	0.00004	0.02136								.		.											
5	0.00012	0.05565								.	*	.											
6	0.00006	0.03080								.	*	.											
7	-0.0001	-.05558								.	*	.											
8	-159E-8	-.00076								.		.											
9	0.00037	0.17637								.	****												
10	-0.0002	-.07636								.	**	.											
11	0.00013	0.06438								.	*	.											
12	-0.0008	-.38661								*****		.											
13	0.00032	0.15160								.	***	.											
14	-0.0001	-.05761								.	*	.											
15	0.00031	0.14957								.	***	.											
16	-0.0003	-.13894								.	***	.											
17	0.00015	0.07048								.	*	.											
18	0.00003	0.01563								.		.											
19	-221E-7	-.01061								.		.											
20	-0.0002	-.11673								.	**	.											
21	0.00008	0.03855								.	*	.											
22	-0.0002	-.09136								.	**	.											
23	0.00047	0.22327								.	****.												
24	-384E-7	-.01842								.		.											

"." marks two standard errors

Autocorrelation Check for White Noise

To	Chi	Autocorrelations
Lag	Square DF	Prob
6	23.27 6	0.001 -0.341 0.105 -0.202 0.021 0.056 0.031
12	51.47 12	0.000 -0.056 -0.001 0.176 -0.076 0.064 -0.387
18	62.44 18	0.000 0.152 -0.058 0.150 -0.139 0.070 0.016

Maximum Likelihood Estimation

Parameter	Estimate	Approx. Std Error	T Ratio	Lag
MA1,1	0.40194	0.07988	5.03	1
MA2,1	0.55686	0.08403	6.63	12

Variance Estimate = 0.00136901
 Std Error Estimate = 0.03700019
 AIC = -485.39302
 SBC = -479.64262
 Number of Residuals= 131

Correlations of the Estimates

Parameter	MA1,1	MA2,1
MA1,1	1.000	-0.040
MA2,1	-0.040	1.000

Autocorrelation Check of Residuals

To Lag	Chi Square	DF	Prob	Autocorrelations						
6	5.28	4	0.259	0.018	0.026	-0.126	-0.112	0.066	0.068	
12	8.57	10	0.573	-0.057	-0.026	0.115	-0.063	0.009	-0.044	
18	12.78	16	0.689	0.011	0.033	0.055	-0.148	0.041	0.005	
24	23.86	22	0.355	-0.103	-0.099	-0.029	-0.029	0.217	0.011	

Forecasts for variable YLOG

Obs	Forecast	Std Error	Lower 95%	Upper 95%
145	6.1102	0.0370	6.0377	6.1827
146	6.0538	0.0431	5.9693	6.1383
147	6.1717	0.0485	6.0767	6.2667
148	6.1993	0.0533	6.0949	6.3037
149	6.2326	0.0577	6.1195	6.3456
150	6.3688	0.0618	6.2477	6.4899
151	6.5073	0.0656	6.3787	6.6359
152	6.5029	0.0693	6.3672	6.6387
153	6.3247	0.0727	6.1822	6.4672
154	6.2090	0.0760	6.0601	6.3580
155	6.0635	0.0792	5.9083	6.2186
156	6.1680	0.0822	6.0069	6.3291
157	6.2064	0.0908	6.0285	6.3843

158	6.1500	0.0962	5.9614	6.3386
159	6.2680	0.1014	6.0692	6.4667
160	6.2956	0.1063	6.0872	6.5039
161	6.3288	0.1110	6.1113	6.5463
162	6.4650	0.1155	6.2387	6.6914
163	6.6035	0.1198	6.3687	6.8384
164	6.5992	0.1240	6.3561	6.8422
165	6.4209	0.1281	6.1700	6.6719
166	6.3053	0.1320	6.0466	6.5639
167	6.1597	0.1358	5.8936	6.4259
168	6.2643	0.1395	5.9909	6.5377

(参考1) 国際線乗客数データ分析のための SAS プログラム

```
options ls=65 ps=50;
filename in "chap6-1.dat";
filename graph 'chap6-2.ps';
goptions device=pslepsfc gsfmode=replace gsfname=graph;
goptions cback=cyan colors=(blue rose yellow lilg rose);
data airline;infile in;input y @@;
t=_n_;
ylog=log(y);                                対数変換
year=int((t-1)/12)+1949;                     西暦年号の生成
month=mod(t-1,12)+1;                         月の生成
date=mdy(month,1,year);                      日付の生成
format date monyy.;                          変数 date に書式を付与
title f=simplex h=1.5 'Airline Passengers 1949/1 - 1960/12';
proc arima;
  identify var=ylog(1,12);                    1 期前の階差を取り, さらに
                                              12 期前の階差を取ったデータを分析
  estimate q=(1)(12) noconstant method=ml;  (2) 式の MA を推定
  forecast out=b1 lead=24 id=date interval=month; 2 年先まで予測
symbol1 i=join l=1 c=rose v=none;
symbol2 i=join l=2 c=yellow v=none;
symbol3 i=join l=3 c=brown v=none;
symbol4 i=join l=3 c=black v=none;
proc gplot data=b1(firstob=109);             109 番目のデータからプロット
plot ylog*date forecast*date u95*date l95*date/
overlay haxis='1jan50'd '1jan55'd '1jan60'd;
実績値, 予測値, 上限, 下限をプロット. 横軸は書式設定された目盛を使う.
```

(参考2) 国際線乗客数データ分析のための SHAZAM プログラム

```
sample 1 144
time 1949 12
read(chap6-1.dat) y/byvar
genr t=time(0)
```

```

arima y/log ndiff=1 nsdiff=1 nspan=12 plotac plotpac nowide
                                         (identification)
arima y/log noconstant ndiff=1 nsdiff=1 nma=1 nsma=1 nspan=12
      coef=beta resid=ry nowide          (estimation)
gen1 s=sqrt($sig2)
arima y/log noconstant ndiff=1 nsdiff=1 nma=1 nsma=1 nspan=12
      coef=beta sigma=s fbeg=144 fend=168 (forecasting)
plot ry t /gnu lineonly device=postscript output=air.ps 残差プロット
stop

```

実績値と予測値および信頼区間

