

第 7 章「数 値 積 分 に よ る 分 布 計 算 - その 2」

本章では，前章に引き続いて，Brown 運動の 2 次汎関数や，それらの比として表すことができる統計量の具体例をいくつか取り上げて，分布関数や密度関数を計算して図示する．

7.1 正の値を取る 2 次汎関数

本節では，正の値を取る統計量として，平均あるいはトレンド調整済み Brown 運動の 2 次汎関数，Watson (1961) により提案された適合度検定統計量を取り上げる．これらの統計量の分布関数は，前章 1 節で述べたように，統計量を S ，特性関数を $\phi(\theta)$ として，反転公式により，次のように計算することができる．

$$F(x) = P(S \leq x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{1 - e^{-i\theta x}}{i\theta} \phi(\theta) \right] d\theta$$

また，密度関数は，

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} [e^{-i\theta x} \phi(\theta)] d\theta$$

により，あるいは，数値微分 $(F(x+h) - F(x))/h$ により計算することができる．以下では，密度関数の計算は数値微分を使うことにする．

7.1.1 平均調整済み Bm とトレンド調整済み Bm

区間 $[0, 1]$ 上で，次の確率過程を考えよう．

$$W_a(t) = W(t) - \int_0^1 W(u) du,$$

$$W_{a,b}(t) = W(t) - \int_0^1 \{4 - 6u + t(12u - 6)\} W(u) du$$

$W_a(t)$ ， $W_{a,b}(t)$ は，それぞれ，平均調整済み Bm，およびトレンド調整済み Bm である．これらは，第 2 章 2 節では，区間 $[0, M]$ 上の確率過程として定義されたものであるが，ここでは簡単のため， $M = 1$ とする．このとき，次の統計量を考えよう．

$$S_1 = \int_0^1 W_a^2(t) dt = \int_0^1 W^2(t) dt - \left(\int_0^1 W(t) dt \right)^2, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S_2 = \int_0^1 W_{a,b}^2(t) dt = \int_0^1 W^2(t) dt - 4 \left(\int_0^1 W(t) dt \right)^2 - 12 \left(\int_0^1 t W(t) dt \right)^2 \\ + 12 \int_0^1 W(t) dt \int_0^1 t W(t) dt \end{aligned} \quad (2)$$

ここで， S_1 については，

$$S_1 \stackrel{D}{=} \int_0^1 (W(t) - tW(1))^2 dt \quad (3)$$

が成り立っている．そして，特性関数は，すでに第 4 章および第 5 章で次のように導出されている．

$$E(e^{i\theta S_1}) = \left(\frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2} \quad (4)$$

特性関数の導出方法としては，Fredholm アプローチよりも Girsanov アプローチの方が容易であろう． S_2 の特性関数についても同様であり，次のようになる（問題 1）．

$$E(e^{i\theta S_2}) = \left[\frac{6}{\theta} \left\{ i \frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} - \frac{1}{\theta} (1 - \cos \sqrt{2i\theta}) \right\} \right]^{-1/2} \quad (5)$$

図 7-1 には， S_1 と S_2 ，および

$$S_0 = \int_0^1 W^2(t) dt \quad (6)$$

の密度関数が描かれている．いずれの分布も単峰である．分散は，直観的にも明らかであるが， $V(S_0) > V(S_1) > V(S_2)$ となっている（問題 2）．

図 7-1

若干のバリエーションとして，次の統計量を考えよう．

$$S_3 = \int_0^1 \left(W(t) - tW(1) - \int_0^1 (W(u) - uW(1)) du \right)^2 dt \quad (7)$$

これは，Bb (Brown 橋) $W(t) - tW(1)$ の平均調整済み過程の 2 次汎関数である．なお，Bb のトレンド調整済み過程 $W(t) - tW(1) - (a + bt)$ は， $b = 0$ となることがわかるから（問題 3），平均調整済み過程と同一となるので，以下では， S_3 のみを扱う．

S_3 は，核関数を使って，次のような重積分表現に書き換えることができる（問題 4）．

$$S_3 \stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \left(\min(s, t) - \frac{1}{2}(s + t) + \frac{1}{2}(s - t)^2 + \frac{1}{12} \right) dW(s) dW(t) \quad (8)$$

これは，Watson (1961) により提案された円周上における適合度検定統計量であり，特性関数は，第 5 章 3 節の（例 5.7）で Fredholm アプローチにより，次のように得られた．

$$E(e^{i\theta S_3}) = \left(\sin \frac{\sqrt{2i\theta}}{2} \bigg/ \frac{\sqrt{2i\theta}}{2} \right)^{-1}$$

特性関数の表現からもわかるように，式 (8) の核関数の固有値は，すべて重複度が 2 である．また， S_3 の平均と分散は，次のようになる（問題 4）．

$$E(S_3) = \frac{1}{12}, \quad V(S_3) = \frac{1}{360} \quad (9)$$

図 7-2 には， S_3 ，および，式 (3) で定義された S_1 の密度関数が描かれている． S_1 は，平均調整を行わない場合の Bb の 2 次汎関数である．

図 7-2

7.1.2 トレンドとの積から作られる 2 次汎関数

ここでは、トレンドとの積から作られる Bm の 2 次汎関数として、3 つのタイプの統計量を扱う。これらの統計量は、時系列回帰における回帰係数の変化を検定するための統計量として使われている (Nabeya-Tanaka (1988) および第 9 章 3 節を参照)。

まず、次の統計量を考えよう。

$$\begin{aligned} Q_\delta &= \int_0^1 t^{2\delta} W^2(t) dt = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2\delta+1} [1 - (\max(s, t))^{2\delta+1}] dW(s) dW(t) \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 (st)^\delta \min(s, t) dW(s) dW(t) \quad (\delta > -1/2) \end{aligned} \quad (10)$$

この統計量は、第 5 章 2 節の (例 5.4) で取り上げたものである。そこでは、特性関数が、Fredholm アプローチにより次のように得られた。

$$\psi_\delta(\theta) = E(e^{i\theta Q_\delta}) = \left[\left(\frac{\sqrt{2i\theta}}{2(\delta+1)} \right)^\nu \Gamma(1-\nu) J_{-\nu} \left(\frac{\sqrt{2i\theta}}{\delta+1} \right) \right]^{-1/2} \quad \left(\nu = \frac{2\delta+1}{2(\delta+1)} \right) \quad (11)$$

ここで、 $J_{-\nu}(z)$ は、階数 $-\nu$ の第 1 種 Bessel 関数である。

図 7-3 には、 Q_0, Q_1, Q_2 の密度関数が描かれている。 Q_0 は、式 (6) の統計量 S_0 と同一である。統計量の形より、トレンドの強さを表すパラメータ δ の値が大きくなるにつれて、分布は原点方向に集中して行くことがわかる。実際、次のことが成り立つ (問題 5)。

$$E(Q_\delta) = \frac{1}{2(\delta+1)}, \quad V(Q_\delta) = \frac{1}{(\delta+1)(2\delta+3)} \quad (12)$$

図 7-3

さらに、 $\delta \rightarrow \infty$ の場合には、Bessel 関数の性質から、次のことが成り立つ (問題 5)。

$$(\delta+1) Q_\delta \Rightarrow \chi^2(1)/2 \quad (13)$$

ここで、 $\chi^2(n)$ は、自由度 n の χ^2 分布に従う確率変数を表す。

次に、 Q_δ を若干拡張した統計量として、2 つの統計量

$$\begin{aligned} R_\delta &= \int_0^1 t^{2\delta} (W(t) - tW(1))^2 dt \\ &\stackrel{\mathcal{D}}{=} \int_0^1 \int_0^1 s^\delta t^\delta (\min(s, t) - st) dW(s) dW(t) \quad (\delta > -1/2) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} U_\delta &= \int_0^1 t^{2\delta} \left(W(t) - (2\delta+1) \int_0^1 u^{2\delta} W(u) du \right)^2 dt \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2\delta+1} ((\min(s, t))^{2\delta+1} - (st)^{2\delta}) dW(s) dW(t) \quad (\delta > -1/2) \end{aligned} \quad (15)$$

を考えよう。 R_δ は、Bm の代わりに Bb (Brown 橋) を使った 2 次汎関数、 U_δ は、Bm の加重平均

$$\int_0^1 a(t) W(t) dt, \quad \int_0^1 a(t) dt = 1, \quad a(t) = (2\delta+1) t^{2\delta} \geq 0$$

を差し引いて定義される 2 次汎関数である。

このとき， R_δ と U_δ の特性関数は，次のようになる（問題 6）．

$$E(e^{i\theta R_\delta}) = \left[\Gamma\left(\frac{2\delta+3}{2(\delta+1)}\right) J_{1/(2(\delta+1))}\left(\frac{\sqrt{2i\theta}}{\delta+1}\right) / \left(\frac{\sqrt{2i\theta}}{2(\delta+1)}\right)^{1/(2(\delta+1))} \right]^{-1/2} \quad (16)$$

$$E(e^{i\theta U_\delta}) = \left[\Gamma\left(\frac{4\delta+3}{2(\delta+1)}\right) J_{(2\delta+1)/(2(\delta+1))}\left(\frac{\sqrt{2i\theta}}{\delta+1}\right) / \left(\frac{\sqrt{2i\theta}}{2(\delta+1)}\right)^{(2\delta+1)/(2(\delta+1))} \right]^{-1/2} \quad (17)$$

図 7-4 には， R_0, R_1, R_2 の密度関数，図 7-5 には， U_0, U_1, U_2 の密度関数が描かれている．この中で， R_0 は，式 (3) の統計量 S_1 と同一である．また， U_0 は， R_0 と同一である．これらの図から，トレンドの強さを表すパラメータ δ の値が大きくなるにつれて，分布は原点方向に集中して行くことがわかる．このことは，統計量の形からも明らかである．

図 7-4

図 7-5

パラメータ δ が大きくなるにつれて， $(\delta+1)^2 R_\delta$ および $(\delta+1)^2 U_\delta$ は，退化しない分布に収束する．具体的には，この場合の特性関数について，次のことが成り立つ（問題 6）．

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} E \left[\exp\{i\theta(\delta+1)^2 R_\delta\} \right] = \left(J_0(\sqrt{2i\theta}) \right)^{-1/2}, \quad (18)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} E \left[\exp\{i\theta(\delta+1)^2 U_\delta\} \right] = \left(\frac{2J_1(\sqrt{2i\theta})}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2} \quad (19)$$

7.1.3 局所対立仮説のもとでの MA 単位根検定統計量

第 5 章 7 節の (例 5.14) で扱った次の統計量を取り上げよう．

$$\begin{aligned} S(c) &= \int_0^1 \int_0^1 [K(s, t) + c^2 K_{(2)}(s, t)] dW(s) dW(t) \\ &\stackrel{D}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda_n} + \frac{c^2}{\lambda_n^2} \right] Z_n^2 \quad \left(K(s, t) = \min(s, t) - st, \quad \lambda_n = n^2 \pi^2 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで， c は非負定数， $K_{(2)}$ は K の反復核， λ_n は K の固有値， $\{Z_n\} \sim \text{NID}(0, 1)$ である．

統計量 $S(c)$ は，MA(1) モデル $y_j = \varepsilon_j - \alpha \varepsilon_{j-1}$ の係数 α の単位根検定 $H_0: \alpha = 1$ に関連する統計量であり，MA 単位根検定の LBIU 統計量を，局所対立仮説 $H_1: \alpha = 1 - c/T$ のもとで評価した場合に現れる分布収束先の統計量である．特に， $S(0)$ は帰無分布であり，単位根仮説は，統計量の値が大きいために棄却される．

このとき， $S(c)$ の特性関数は，

$$E(e^{i\theta S(c)}) = \left[D(i\theta + \sqrt{-\theta^2 + 2ic^2\theta}) D(i\theta - \sqrt{-\theta^2 + 2ic^2\theta}) \right]^{-1/2}$$

となることが示された．ここで， $D(\lambda)$ は $K(s, t) = \min(s, t) - st$ の FD であり， $D(\lambda) = \sin \sqrt{\lambda} / \sqrt{\lambda}$ となることから，

$$E(e^{i\theta S(c)}) = \left[\frac{\sin \sqrt{i\theta + \sqrt{-\theta^2 + 2ic^2\theta}}}{\sqrt{i\theta + \sqrt{-\theta^2 + 2ic^2\theta}}} \frac{\sin \sqrt{i\theta - \sqrt{-\theta^2 + 2ic^2\theta}}}{\sqrt{i\theta - \sqrt{-\theta^2 + 2ic^2\theta}}} \right]^{-1/2}$$

を得る．

図 7-6 には， $c = 0, 5, 10$ の値に対応する $S(c)$ の密度関数が描かれている． $S(0)$ は，MA 単位根検定の帰無分布であり， c の値が大きくなるにつれて， $S(c)$ の分布は右にシフトしている． $S(0)$ の分布の上側 $100\gamma\%$ 点を x_γ とすれば， $S(c)$ の分布において， x_γ よりも右側の面積 $P(S(c) > x_\gamma)$ が有意水準 γ もとでの単位根検定の検出力を与えることになる．

図 7-6

7.2 正負の値を取る 2 次汎関数

統計量 S が正負の値を取る場合，その分布関数 $F(x)$ は，特性関数を $\phi(\theta)$ として，

$$F(x) = P(S \leq x) = P(S - x \leq 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \operatorname{Im} [e^{-i\theta x} \phi(\theta)] d\theta$$

により計算される．したがって，密度関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} [i e^{-i\theta x} \phi(\theta)] d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} [e^{-i\theta x} \phi(\theta)] d\theta$$

により計算できる．ただし，以下では，分布関数の数値微分を使う．

ここでは，例として，2 つの統計量を取り上げよう．まず，Lévy の確率面積

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 (W_1(t) dW_2(t) - W_2(t) dW_1(t)) \quad (21)$$

を考えよう． $\{W_1(t)\}$ と $\{W_2(t)\}$ は，互いに独立な Bm である． L の特性関数は，第 4 章 3 節の (例 4.9) および第 5 章 3 節の (例 5.6) で説明したように，まず， $\{W_1(t)\}$ を与えたときの条件付き分布が，

$$\begin{aligned} L | \{W_1(t)\} &\sim N \left(0, \int_0^1 \left(W_1(t) - \frac{1}{2} W_1(1) \right)^2 dt \right) \\ &= N \left(0, \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4} [1 - 2|s - t|] dW_1(s) dW_1(t) \right) \end{aligned}$$

となることを使って，Girsanov アプローチあるいは Fredholm アプローチにより，

$$\begin{aligned} E(e^{i\theta L}) &= E \left[E(e^{i\theta L} | \{W_1(t)\}) \right] = E \left[\exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 \left(W_1(t) - \frac{1}{2} W_1(1) \right)^2 dt \right\} \right] \\ &= E \left[\exp \left\{ -\frac{\theta^2}{2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{4} [1 - 2|s - t|] dW_1(s) dW_1(t) \right\} \right] \\ &= \left(\cosh \frac{\theta}{2} \right)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\theta^2}{(2n-1)^2 \pi^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

が得られた．この最後の表現から，次のことが成り立つ (問題 7)．

$$L \stackrel{D}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2 - Y_n^2}{2(2n-1)\pi}, \quad (\{X_n^2\}, \{Y_n^2\} \sim \chi^2(2))$$

ここで， $\{X_n^2\}$ と $\{Y_n^2\}$ は，互いに独立に，自由度 2 の χ^2 分布に従う確率変数列である．

特性関数を実数値となることから, L の分布は原点对称である. そして, L の密度関数 $f(x)$ は, 次のように明示的に表現できる (Gradshteyn-Ryzhik (1994, p. 540)).

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \theta x}{\cosh(\theta/2)} d\theta = \frac{1}{\cosh \pi x}$$

図 7-7 には, L の密度関数 (実線) と正規分布 $N(0, 1/4)$ の密度関数 (破線) が描かれている. もちろん, L の密度関数の計算には, 数値積分は不要である. 2 つの密度関数は, ともに, 平均 0, 分散 $1/4$ である. 他方, 4 次のキュムラントは, L は $1/8$, $N(0, 1/4)$ は 0 である (問題 8).

図 7-7

次の例は Ito 積分を含む場合である. 第 5 章 2 節の (例 5.5) で取り上げた統計量

$$\begin{aligned} U(\tau) &= \int_0^1 t^\tau W(t) dW(t) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{2} (\max(s, t))^\tau dW(s) dW(t) - \frac{1}{2(\tau+1)} \quad (\tau \geq 0) \end{aligned} \quad (22)$$

を考えよう. $U(\tau)$ の分布の平均は, 任意の非負の τ に対して 0 である. $U(\tau)$ の特性関数は, Fredholm アプローチにより, 次のように得られた.

$$E(e^{i\theta U(\tau)}) = e^{-i\theta/(2(\tau+1))} \left[\left(\frac{\sqrt{-4i\tau\theta}}{2(\tau+1)} \right)^{\nu+1} \Gamma(-\nu) J_{-\nu-1} \left(\frac{\sqrt{-4i\tau\theta}}{\tau+1} \right) \right]^{-1/2}$$

ここで, $\nu = \tau/(\tau+1)$ である.

図 7-8 には, $\tau = 0, 1/2, 1$ の場合の $U(\tau)$ の密度関数が描かれている. ここで, $U(0) = \int_0^1 W(t) dW(t) = (W^2(1) - 1)/2$ である. $U(\tau)$ の分散は $1/(2(\tau+1))$ であり, τ が正のときは, 鋭い峰をもつ単峰型である.

図 7-8

$U(\tau)$ の分布については, $\tau \rightarrow \infty$ のとき, 次のことが成り立つ (問題 9).

$$V(\tau) = \sqrt{\tau+1} U(\tau) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (X^2 - Y^2) \quad (X^2, Y^2 \sim \chi^2(1)) \quad (23)$$

ここで, X^2 と Y^2 は, 互いに独立に $\chi^2(1)$ に従う確率変数である. 図 7-9 には, $\tau = 5, 10, 50$ の場合の $V(\tau)$ の密度関数が描かれている. これらは, τ が大きくなるにつれて, 互いに独立な $\chi^2(1)$ に従う確率変数の差 (の定数倍) の分布に収束することがイメージできよう.

図 7-9

7.3 O-U 過程の係数推定量の分布

観測区間を $[0, M]$ とするような次の O-U 過程を考えよう．

$$dZ_M(u) = -cZ_M(u) dt + dW(u), \quad Z_M(0) = 0, \quad u \in [0, M] \quad (24)$$

このとき， $-c$ の LSE は，

$$-\hat{c} = \frac{\int_0^M Z_M(u) dZ_M(u)}{\int_0^M Z_M^2(u) dt} = \frac{(Z_M^2(M) - M)/2}{\int_0^M Z_M^2(u) du} = \frac{U_M}{V_M} \quad (25)$$

となる．2 番目の等号は，Ito の確率微分 $d(Z_M^2(u)) = 2Z_M(u) dZ_M(u) + du$ から得られる．推定量 $-\hat{c}$ は，Radon-Nikodym の密度関数に基づく尤度関数

$$L(c) = \frac{d\mu_{Z_M}}{d\mu_W}(Z_M) = \exp \left\{ -c \int_0^M Z_M(u) dZ_M(u) - \frac{c^2}{2} \int_0^M Z_M^2(u) du \right\}$$

を最大にすることから MLE でもある．なお， $M = 1$ の場合には， $-\hat{c}$ は，第 3 章 6 節で議論したランダム・ウォーク近接モデル

$$y_j = \rho y_{j-1} + \varepsilon_j, \quad y_0 = 0, \quad \rho = 1 - \frac{c}{T}, \quad \{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2), \quad (j = 1, \dots, T)$$

における ρ の LSE $\hat{\rho}$ を標準化した $T(\hat{\rho} - 1)$ の分布収束先でもある．単位根検定の観点からは， $c \neq 0$ の場合の分布は，局所対立仮説 $H_1: \rho = 1 - c/T$ のもとでの漸近分布となり，局所検出力を計算する手がかりを与える．

以下， $-\hat{c}$ の分布を求めよう．そのために，まず，Girsanov の定理より，(25) の U_M と V_M の同時 m.g.f. を求めると，次の結果が得られる（問題 10）．

$$m(\theta_1, \theta_2) = E(e^{\theta_1 U_M + \theta_2 V_M}) = \exp \left\{ \frac{M(c - \theta_1)}{2} \right\} \left[\cos M\mu + (c - \theta_1) \frac{\sin M\mu}{\mu} \right]^{-1/2} \quad (26)$$

ここで， $\mu = \sqrt{2\theta_2 - c^2}$ である．このことから， $-\hat{c}$ の分布関数は，

$$\begin{aligned} P(-\hat{c} \leq x) &= P(xV_M - U_M \geq 0) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \text{Im}[m(-i\theta, i\theta x)] d\theta \end{aligned}$$

により計算することができる．

図 7-10 には， $M = 1$ とした場合の $-\hat{c}$ の密度関数が 6 通り描かれている．これらは，右から順に， $c = -2, -1/2, 0, 1, 2, 5$ の場合である．特に， $c = 0$ は，単位根分布 $\int_0^1 W(t) dW(t)$ に対応する．

図 7-10

観測時間 M を大きくした場合の $-\hat{c}$ の漸近分布は，パラメータ c の符号により異なる．図 7-11 は， c が正の場合である．ここでは， $M = 10$ とした場合の $-\hat{c}$ の 3 通りの密度関数（右から順に， $c = 1, 2, 5$ の場合）が描かれている．図から， c が正の場合， M が大きくなるにつれて正規分布に収束することが予想される．

図 7-11

実際， c が正の場合に， $M \rightarrow \infty$ のとき，次のことが成り立つ．

$$\sqrt{M}(\hat{c} - c) \Rightarrow N(0, 2c) \quad (27)$$

このことを示すには，まず，

$$-\sqrt{M}(\hat{c} - c) = \frac{\frac{1}{\sqrt{M}} \int_0^M Z_M(u) (dZ_M(u) + cZ_M(u) du)}{\frac{1}{M} \int_0^M Z_M^2(u) du} = \frac{A_M}{B_M}$$

として，式 (26) より，

$$\begin{aligned} E(e^{\theta_1 A_M + \theta_2 B_M}) &= m \left(\frac{\theta_1}{\sqrt{M}}, \frac{c\theta_1}{\sqrt{M}} + \frac{\theta_2}{M} \right) \\ &= \exp \left\{ \frac{cM - \sqrt{M}\theta_1}{2} \right\} \left[\cosh \nu + (cM - \sqrt{M}\theta_1) \frac{\sinh \nu}{\nu} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$\nu = (c^2 M^2 - 2cM\sqrt{M}\theta_1 - 2M\theta_2)^{1/2} = cM - \sqrt{M}\theta_1 - \frac{\theta_2}{c} - \frac{\theta_1^2}{2c} + O(M^{-1/2})$$

である．したがって，

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} E(e^{\theta_1 A_M + \theta_2 B_M}) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{cM - \sqrt{M}\theta_1}{2} \right\} [e^\nu + O(M^{-1} \sinh \nu)]^{-1/2} \\ &= \exp \left\{ \frac{\theta_1^2}{4c} + \frac{\theta_2}{2c} \right\} \end{aligned}$$

となるから， A_M は $N(0, 1/(2c))$ に分布収束， B_M は $1/(2c)$ に確率収束する．このことから，(27) が成り立つ．

$c = 0$ の場合は， $Z_M(u) = W(u)$ となるので，

$$-\hat{c} = \frac{\int_0^M W(u) dW(u)}{\int_0^M W^2(u) du} \stackrel{D}{=} \frac{\int_0^1 W(t) dW(t)}{M \int_0^1 W^2(t) dt}$$

を得る．したがって， $c = 0$ の場合は， $-M\hat{c}$ の分布は， M に依存せずに一定で，単位根分布に従う．

c が負の場合は，次の変換を考える．

$$-\frac{\hat{c} - c}{2ce^{cM}} = \frac{2ce^{cM} \int_0^M Z_M(u) (dZ_M(u) + cZ_M(u) du)}{4c^2 e^{2cM} \int_0^M Z_M^2(u) du} = \frac{P_M}{Q_M} \quad (28)$$

ここで，再び，式 (26) を使って， P_M と Q_M の同時 m.g.f. として，

$$\begin{aligned} E(e^{\theta_1 P_M + \theta_2 Q_M}) &= m(2ce^{cM}\theta_1, 2c^2 e^{cM}\theta_1 + 4c^2 e^{2cM}\theta_2) \\ &= \exp \left\{ \frac{cM}{2} (1 - 2e^{cM}\theta_1) \right\} \left[\cosh \xi + cM (1 - 2e^{cM}\theta_1) \frac{\sinh \xi}{\xi} \right]^{-1/2} \end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi} &= \left[c^2 M^2 \left(1 - 4e^{cM}\theta_1 - 8e^{2cM}\theta_2 \right) \right]^{-1/2} \\ &= -\frac{1}{cM} \left(1 + 2e^{cM}\theta_1 + 4e^{2cM}\theta_2 + 6e^{2cM}\theta_1^2 + O(e^{3cM}) \right)\end{aligned}$$

である． P_M と Q_M の同時 m.g.f. の表現から， $-(\hat{c} - c)/(2ce^{cM})$ の分布は， c あるいは M の個々の値に依存せずに， $c \times M$ のみに依存することがわかる．したがって，漸近分布は， $M \rightarrow \infty$ としても， $c \rightarrow -\infty$ としても，同一の結果が得られることになる．ここでは， $M \rightarrow \infty$ として，

$$\begin{aligned}& \cosh \xi + cM \left(1 - 2e^{cM}\theta_1 \right) \frac{\sinh \xi}{\xi} \\ &= \frac{1}{2} \left[e^\xi + e^{-\xi} + cM \left(1 - 2e^{cM}\theta_1 \right) \left(-\frac{1}{cM} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + 2e^{cM}\theta_1 + 4e^{2cM}\theta_2 + 6e^{2cM}\theta_1^2 + O(e^{3cM}) \right) \left(e^\xi - e^{-\xi} \right) \right] \\ &= e^{cM} (1 - 2\theta_2 - \theta_1^2) + o(e^{cM})\end{aligned}$$

を得る．以上のことから，

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E(e^{\theta_1 P_M + \theta_2 Q_M}) = (1 - 2\theta_2 - \theta_1^2)^{-1/2} \quad (29)$$

となる．この最後の m.g.f. は， X と Y が 2 次元標準正規分布に従う場合の XY と Y^2 の同時 m.g.f. $E(\exp(\theta_1 XY + \theta_2 Y^2))$ である（問題 11）から， $XY/Y^2 = X/Y$ は標準 Cauchy 分布に従う．

図 7-12 には， $M = 5$ とした場合の $-(\hat{c} - c)/(2ce^{cM})$ の 2 通りの密度関数 ($c = -1/2$ と $c = -1$)，および，Cauchy 分布の密度関数が描かれている．この場合の分布と c, M との関係について上述したように， $c \times M$ の値が小さい（絶対値が大きい） $c = -1$ の方が極限分布に近いことがわかる．

図 7-12

第 7 章 練習問題

1. 統計量

$$S = \int_0^1 \left(W(t) - \int_0^1 \{4 - 6u + t(12u - 6)\} W(u) du \right)^2 dt$$

の特性関数は，次の形で与えられることを示せ．

$$E(e^{i\theta S}) = \left[\frac{6}{\theta} \left\{ i \frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} - \frac{1}{\theta} (1 - \cos \sqrt{2i\theta}) \right\} \right]^{-1/2}$$

2. 式 (1), (2), (3) のそれぞれで定義された統計量 S_1, S_2, S_0 の密度関数を描け．また，それぞれの分散を計算せよ．
3. Bb (Brown 橋) のトレンド調整済み過程 $W(t) - tW(1) - (a + bt)$ は， $b = 0$ となることを示せ．
4. 次の統計量 S の平均と分散を求めよ．また， S を Riemann-Stieltjes 重積分表現に書き換えよ．さらに， S の密度関数を描け．

$$S = \int_0^1 \left(W(t) - tW(1) - \int_0^1 (W(u) - uW(1)) du \right)^2 dt$$

5. 次の統計量 Q_δ に対して， $Q_{1/2}$ の密度関数を描け．また， Q_δ の分散は $1/((\delta+1)(2\delta+3))$ となることを示せ．

$$Q_\delta = \int_0^1 t^{2\delta} W^2(t) dt$$

さらに，次の分布収束が成り立つことを示せ．

$$(\delta + 1) Q_\delta \Rightarrow \chi^2(1)/2, \quad (\delta \rightarrow \infty)$$

6. 次の 2 つの統計量 R_δ と U_δ の特性関数を求めよ．また， $R_{1/2}$ と $U_{1/2}$ の密度関数を描け．

$$\begin{aligned} R_\delta &= \int_0^1 t^{2\delta} (W(t) - tW(1))^2 dt \\ U_\delta &= \int_0^1 t^{2\delta} \left(W(t) - (2\delta + 1) \int_0^1 u^{2\delta} W(u) du \right)^2 dt \end{aligned}$$

さらに，次のことが成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow \infty} E \left[\exp \{ i\theta (\delta + 1)^2 R_\delta \} \right] &= \left(J_0 \left(\sqrt{2i\theta} \right) \right)^{-1/2} \\ \lim_{\delta \rightarrow \infty} E \left[\exp \{ i\theta (\delta + 1)^2 U_\delta \} \right] &= \left(\frac{2J_1 \left(\sqrt{2i\theta} \right)}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

ここで， $J_\nu(z)$ は，階数 ν の第 1 種 Bessel 関数である．

7. 次の確率変数 L の特性関数は, $(\cosh(\theta/2))^{-1}$ となることを示せ. ただし, $\{X_n^2\}$ と $\{Y_n^2\}$ は, 互いに独立で, それぞれが $\chi^2(2)$ に従う確率変数列である.

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^2 - Y_n^2}{2(2n-1)\pi}$$

8. 本章の式 (21) で定義された Lévy の確率面積の 4 次のキュムラントは, $1/8$ となることを示せ.
9. 次の統計量 $U(\tau)$ に対して, $U(1/2)$ の密度関数を描け.

$$U(\tau) = \int_0^1 t^\tau W(t) dW(t) \quad (\tau > 0)$$

また, 次のことが成り立つことを示せ.

$$\sqrt{\tau+1} U(\tau) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}} (X^2 - Y^2)$$

ここで, X^2 と Y^2 は, 互いに独立で, それぞれが $\chi^2(1)$ に従う確率変数である.

10. 確率過程 $\{Z_M(u)\}$ は, 次のような O-U 過程であるとする.

$$dZ_M(u) = -cZ_M(u) dt + dW(u), \quad Z_M(0) = 0, \quad u \in [0, M]$$

このとき, 次の U_M と V_M の同時 m.g.f. を求めよ.

$$U_M = \int_0^M Z_M(u) dZ_M(u), \quad V_M = \int_0^M Z_M^2(u) du$$

また, $M = 20$ とした場合の $-\hat{c} = U_M/V_M$ の密度関数を, $c = 5$ と $c = 10$ の 2 通りについて描け. さらに, $M = 10$ とした場合の $-(\hat{c} - c)/(2ce^{cM})$ の密度関数を, $c = -1/4$ と $c = -1/2$ の 2 通りについて描け.

11. X と Y が 2 次元標準正規分布に従うとき, XY と Y^2 の同時 m.g.f. は, 次の形で与えられることを示せ.

$$E(e^{\theta_1 XY + \theta_2 Y^2}) = (1 - 2\theta_2 - \theta_1^2)^{-1/2}$$

図 7-1 S_j の密度関数 (S_0 : 点線, S_1 : 破線, S_2 : 実線)

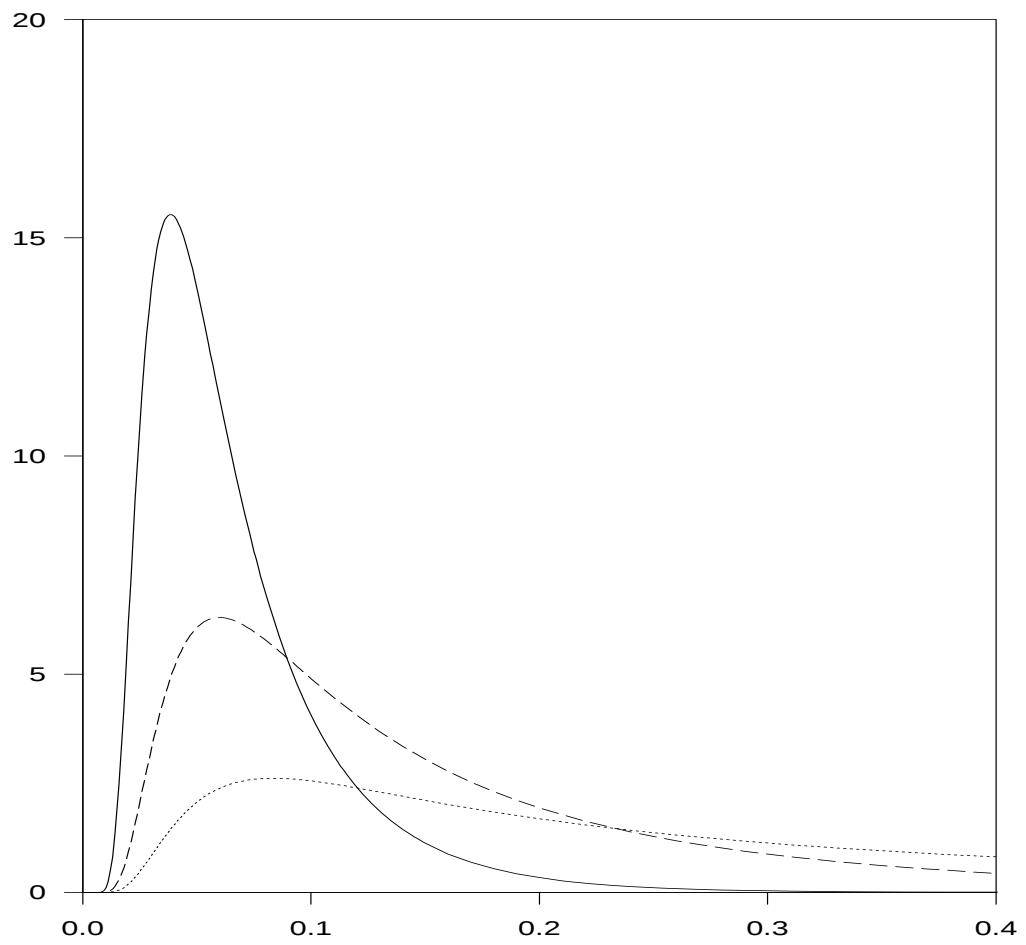


図 7-2 S_1 と S_3 の密度関数 (S_1 : 点線, S_3 : 実線)

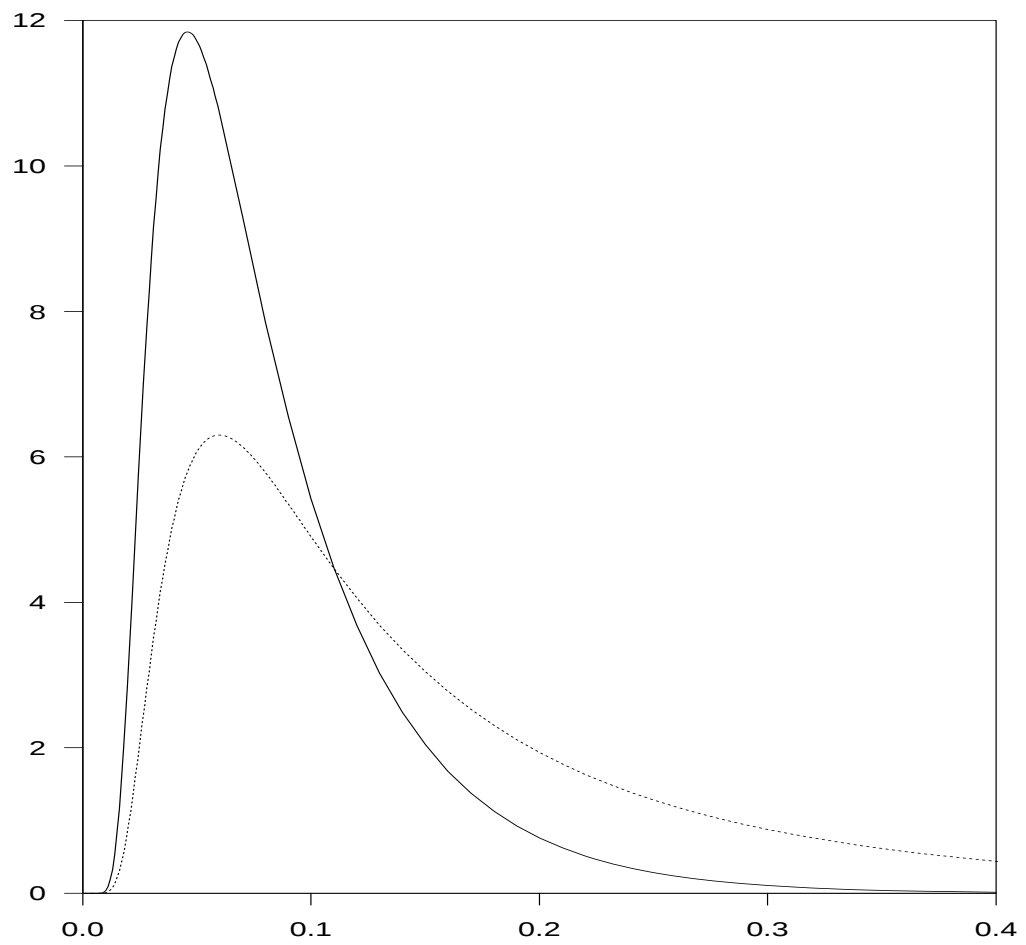


図 7-3 Q_δ の密度関数 (Q_0 : 点線, Q_1 : 破線, Q_2 : 実線)

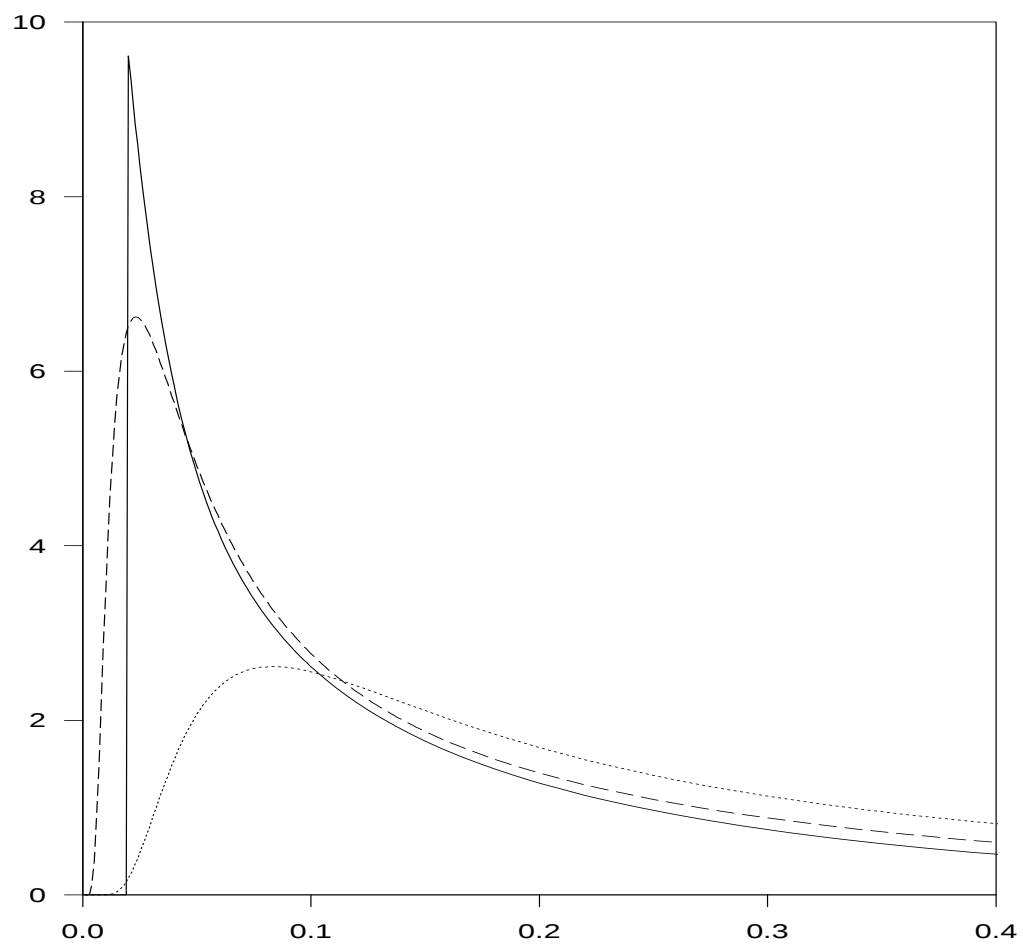


図 7-4 R_δ の密度関数 (R_0 : 点線, $R_{1/2}$: 破線, R_1 : 実線)

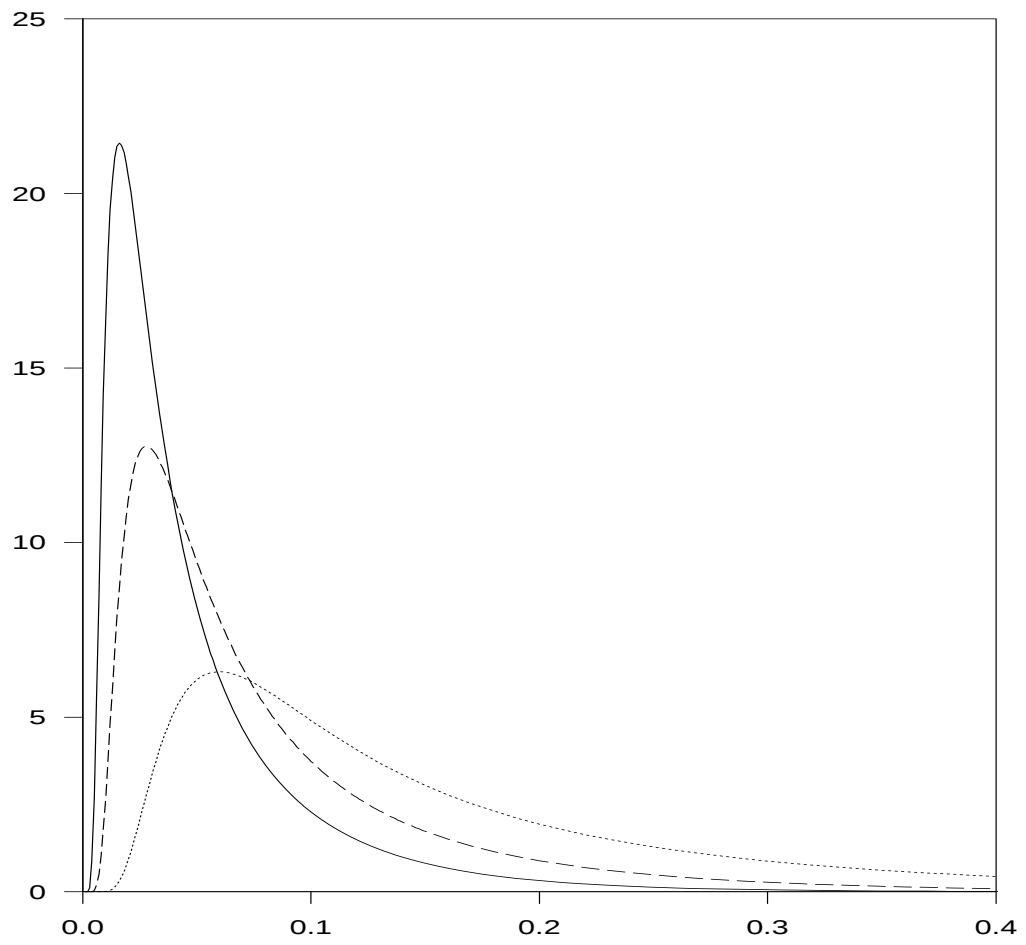


図 7-5 U_δ の密度関数 (U_0 : 点線, $U_{1/2}$: 破線, U_1 : 実線)

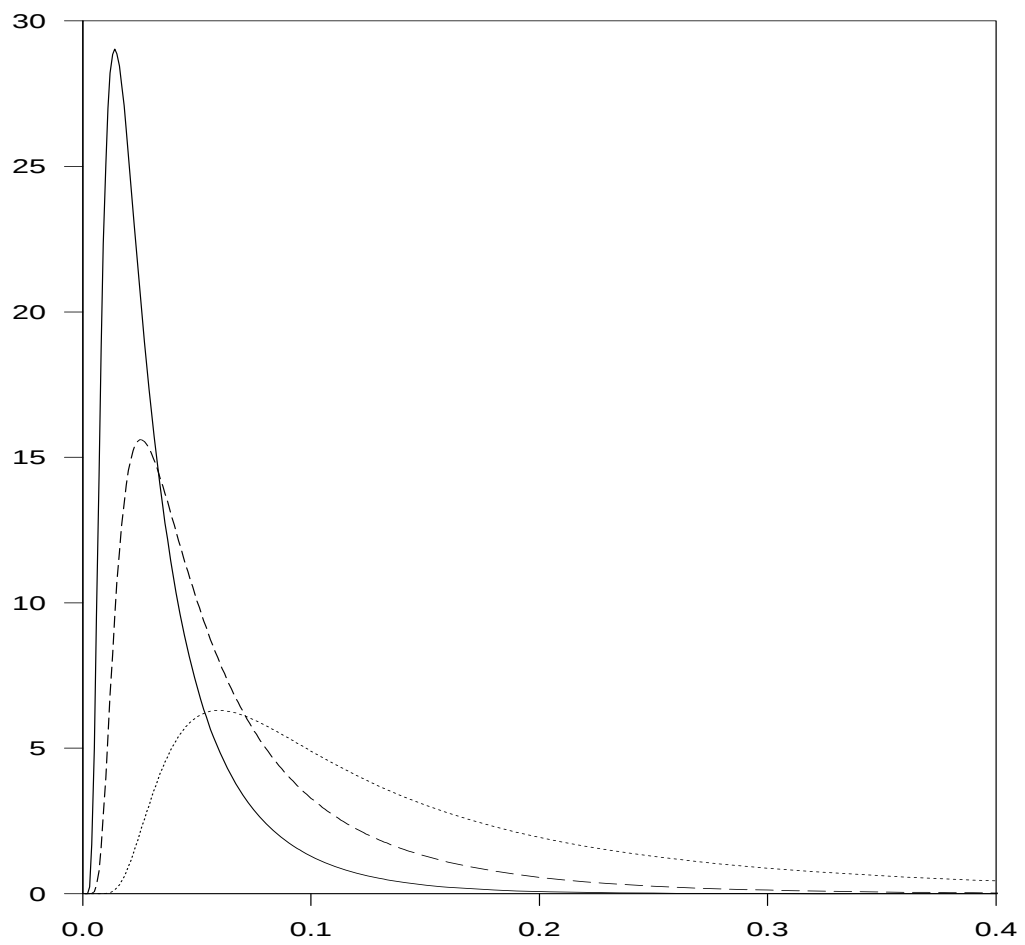


図 7-6 MA 単位根分布 ($S(0)$: 点線, $S(5)$: 破線, $S(10)$: 実線)

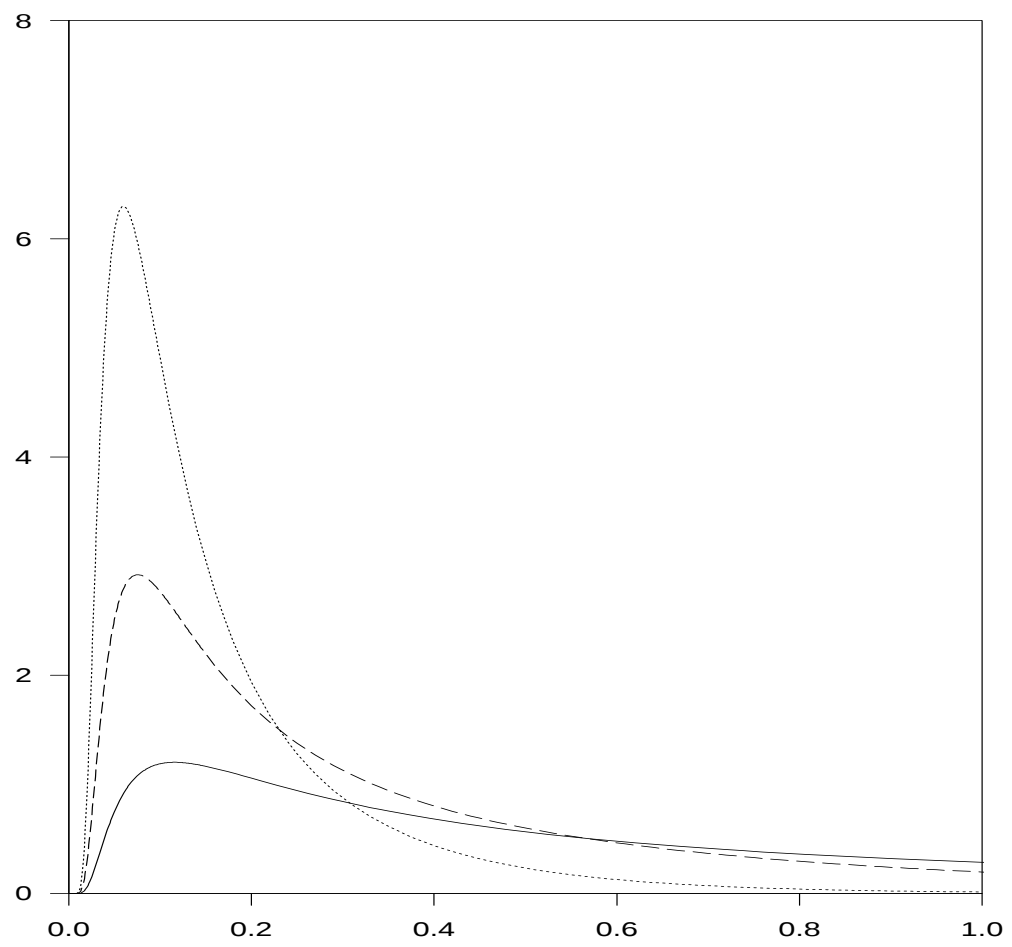


図 7-7 Lévy の確率面積 (確率面積：実線，正規分布：破線)

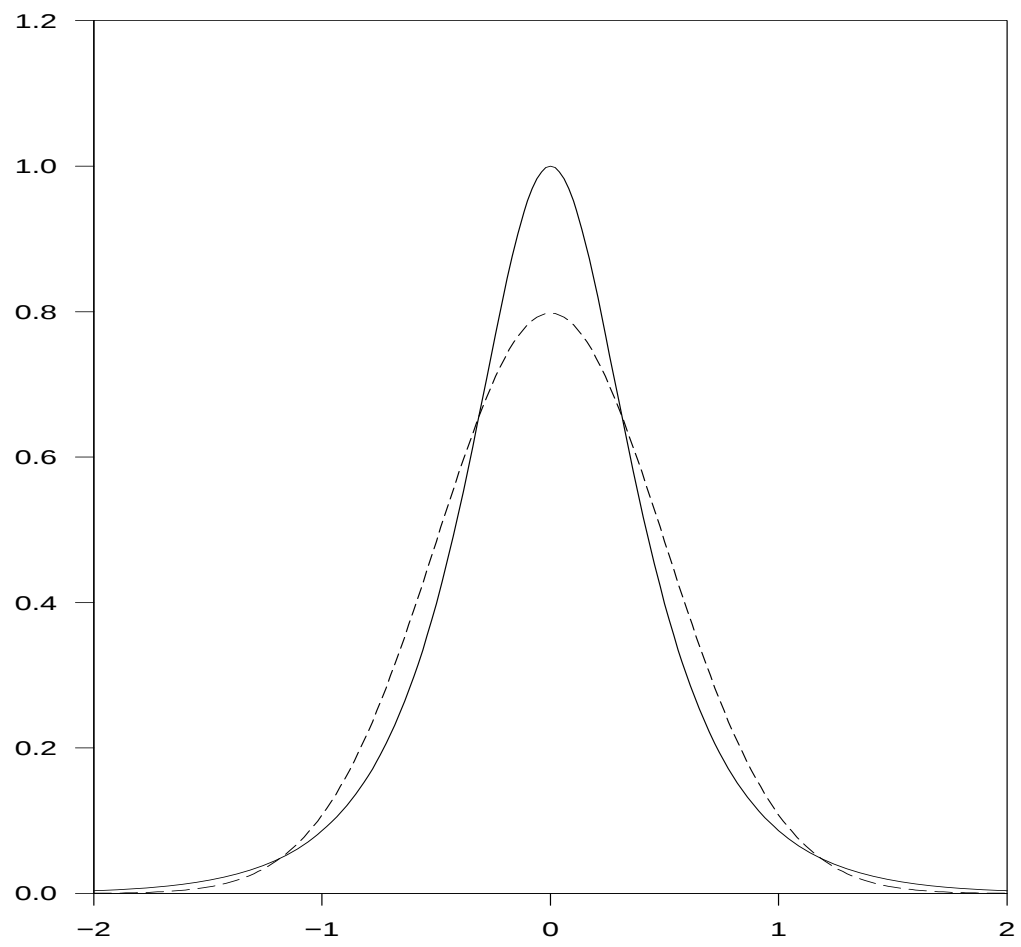


図 7-8 $U(\tau)$ の密度関数 ($U(0)$: 点線, $U(1/2)$: 破線, $U(2)$: 実線)

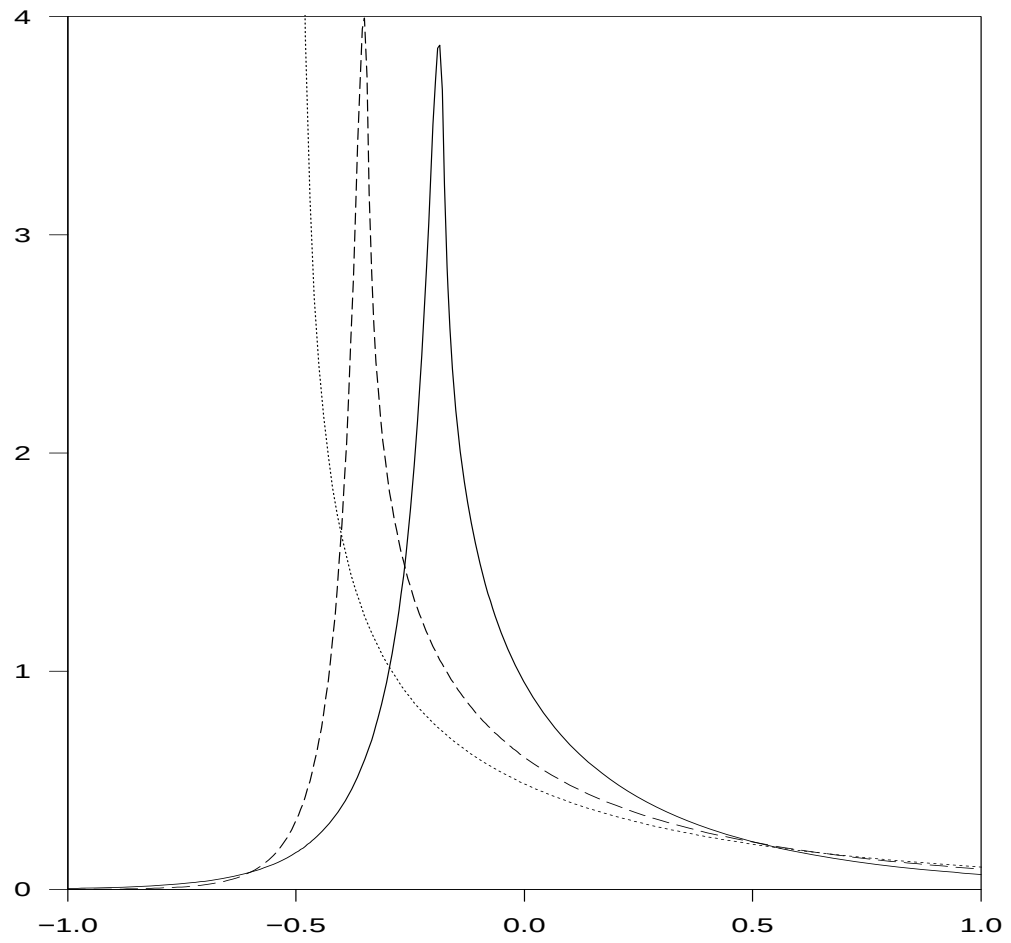


図 7-9 $V(\tau)$ の密度関数 ($V(5)$: 点線, $V(20)$: 破線, $V(50)$: 実線)

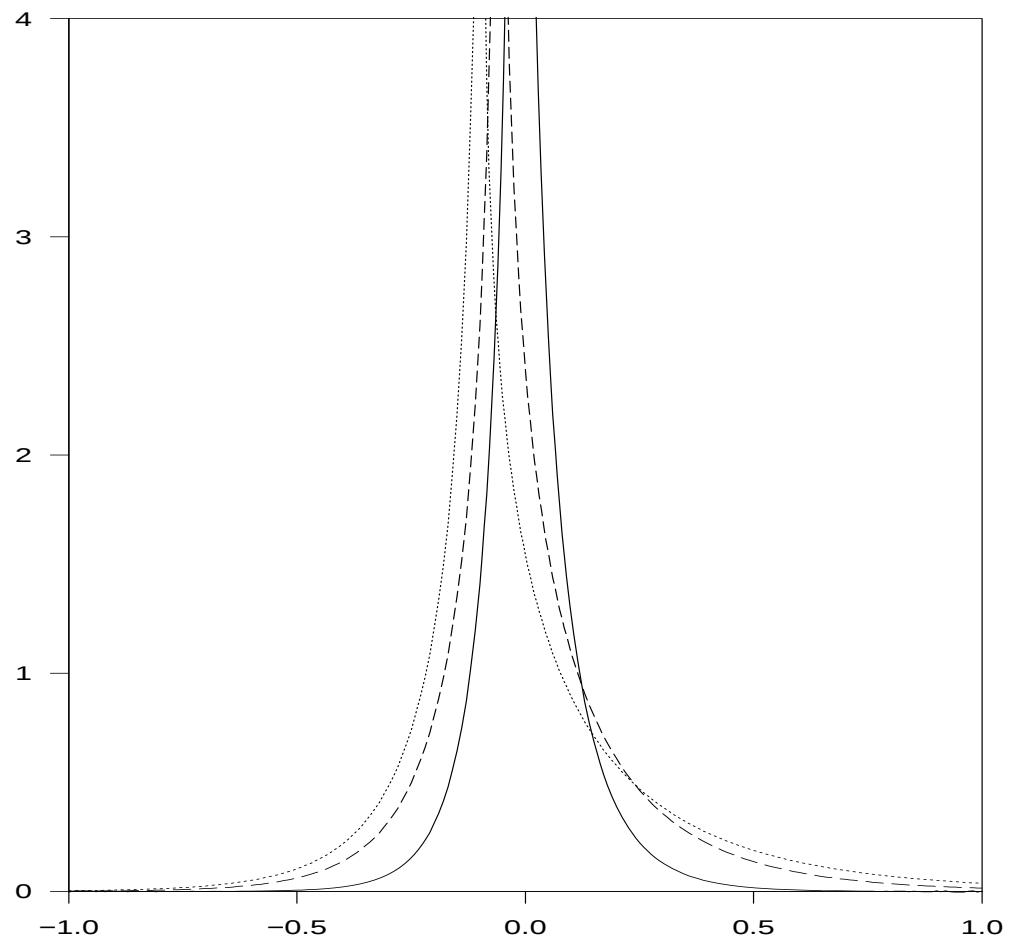


図 7-10 $M = 1$ の場合の $-\hat{c}$ の密度関数 (右から $c = -1, -1/2, 0, 1, 2, 5$)

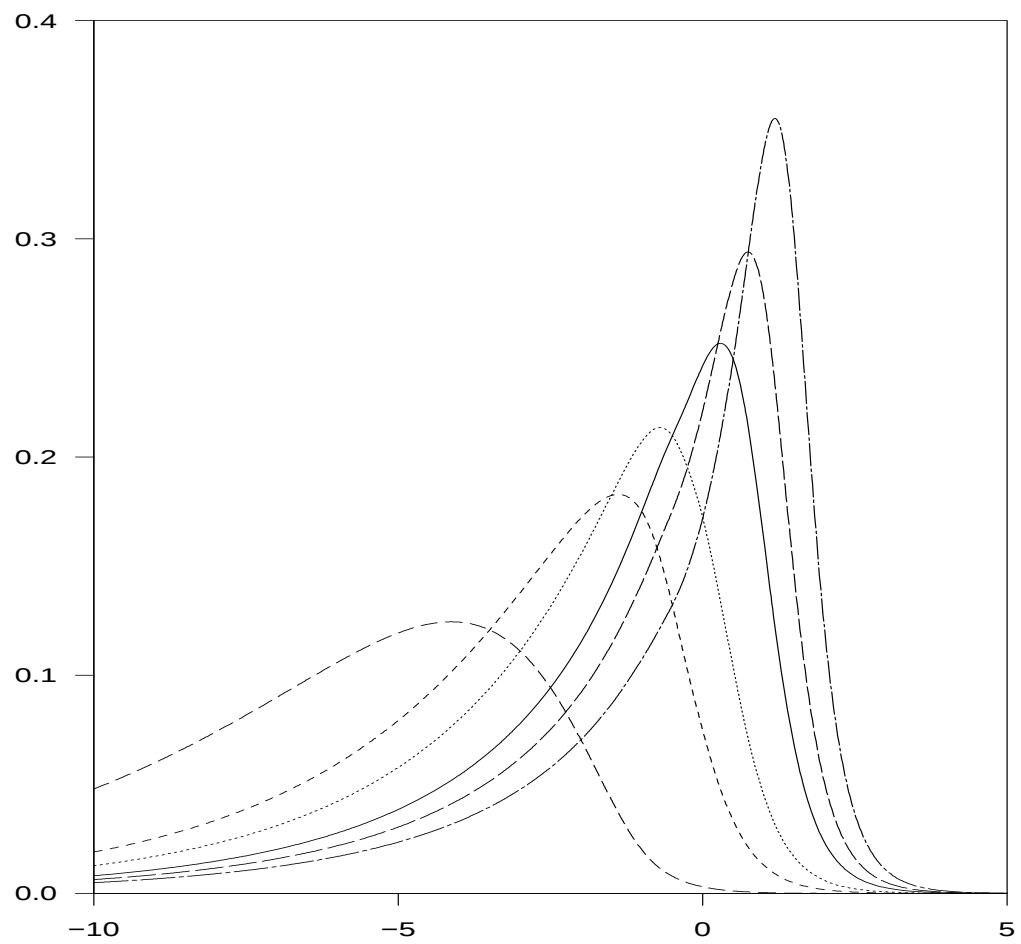


図 7-11 $M = 10$ の場合の $-\hat{c}$ の密度関数 (右から $c = 1, 2, 5$)

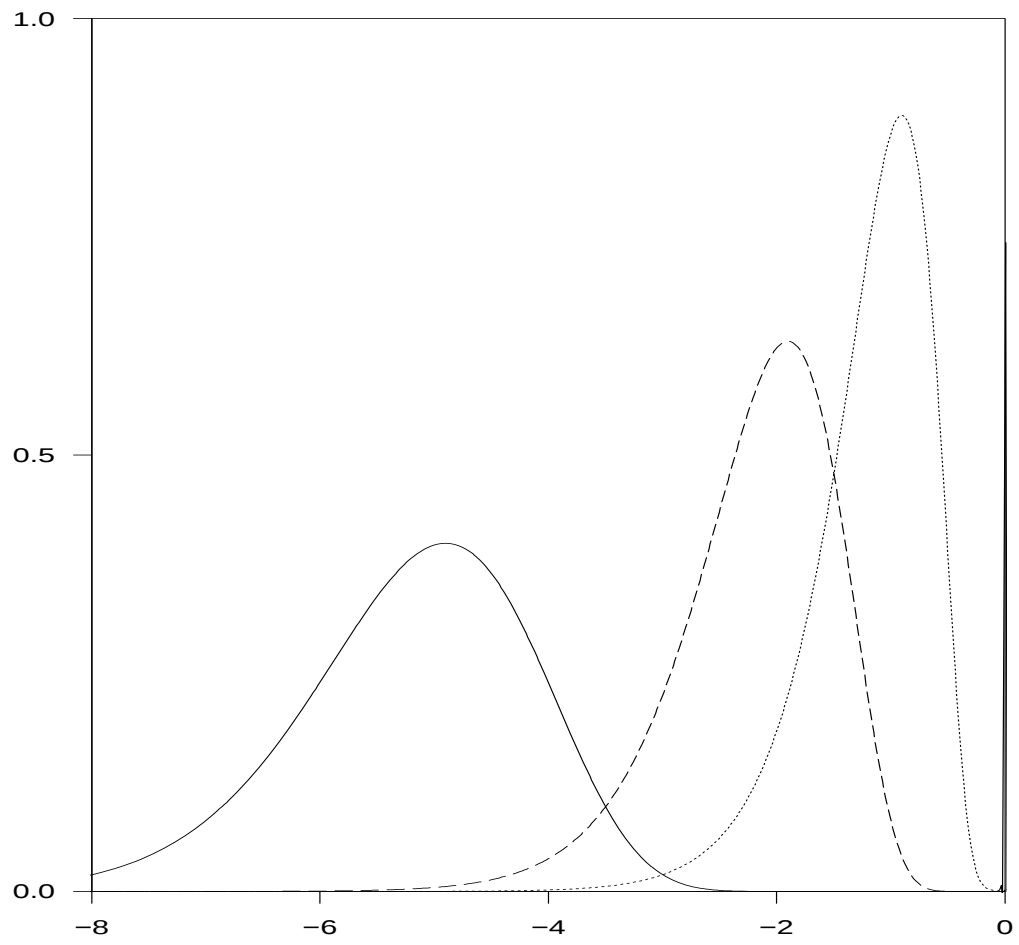


図 7-12 $M = 5$ の場合の $-(\hat{c} - c)/(2ce^{cM})$ の密度関数
 ($c = -1/2$: 点線 , $c = -1$: 破線 , Cauchy 分布 : 実線)

