

第7章「単位根検定と共和分分析」

1. 単位根モデル

AR(1) モデルの係数 ρ が 1 のとき，単位根モデル（ランダム・ウォーク）という．

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t, \quad (t = 1, \dots, T) \quad (1)$$

ここで，初期値 y_0 は 0 と仮定する．

定義：非定常な時系列 $\{y_t\}$ が， d 階の差分を取ったときにはじめて定常になるとき， $I(d)$ 過程であるという． $I(0)$ は定常過程である． $I(d)$ は Integrated of order d の略である．

単位根モデルの implications:

(a) 時系列 $\{y_t\}$ は (1) の最右辺のように表されるので，過去のショックは同等のウェイトで将来に影響を与える（定常な AR(1) モデルでは，過去の影響は幾何級数的に減少）．

(b) 時系列 $\{y_t\}$ はマルチンゲール（martingale）である．すなわち，

$$E(y_{t+1} | y_t, \dots, y_1) = y_t \quad \text{来期の BLUP は今期の値}$$

2. 単位根分布

(1) の AR(1) モデルにおける ρ の LSE $\hat{\rho}$ の性質：

$$|\rho| < 1 \text{ のとき: } \sqrt{T}(\hat{\rho} - \rho) \Rightarrow N(0, 1 - \rho^2)$$

$$\rho = 1 \text{ のとき: } T(\hat{\rho} - 1) \Rightarrow \frac{\int_0^1 W(t) dW(t)}{\int_0^1 W^2(t) dt}$$

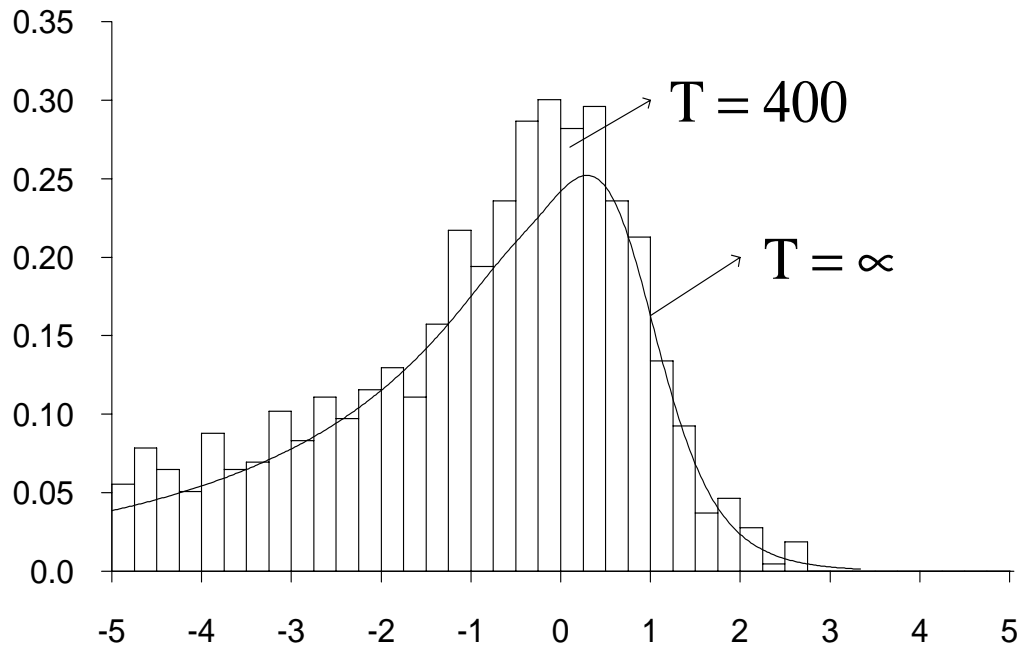
標準ブラウン運動 $\{W(t)\}$ の定義：

(a) $W(0) = 0$

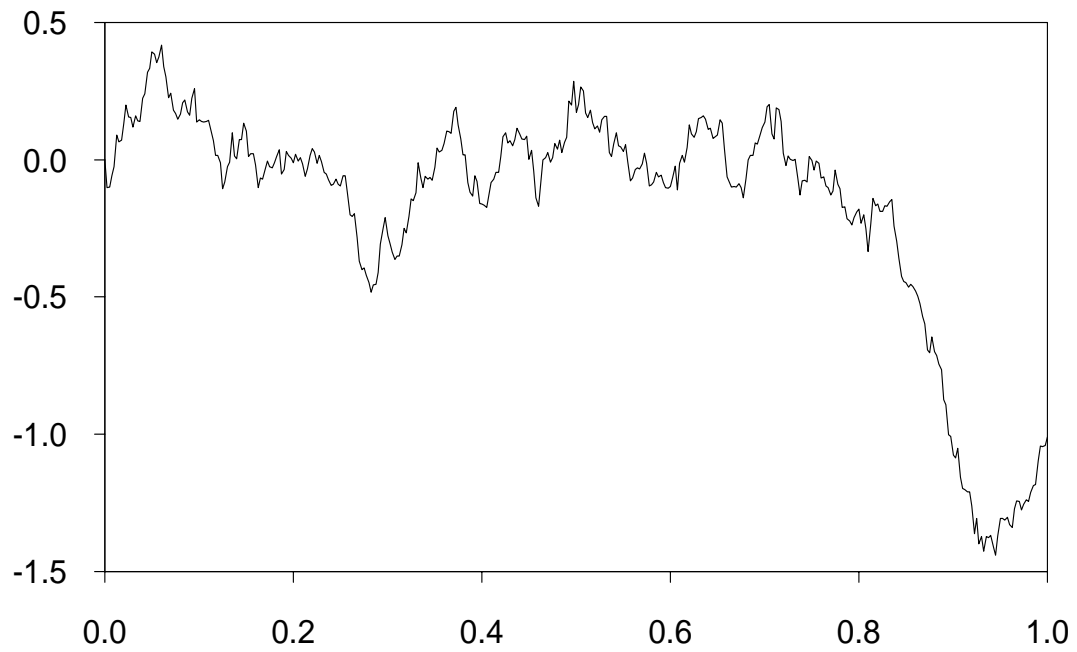
(b) 任意の時点 $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq 1$ に対して，増分 $W(t_1) - W(t_0)$, $W(t_2) - W(t_1)$, \dots , $W(t_n) - W(t_{n-1})$ は互いに独立

(c) 各 t に対して， $W(t) \sim N(0, t)$

単位根分布 $[T(\hat{\rho} - 1)$ の分布]



標準ブラウン運動の例



3 . 単位根検定

以下 , $(1 - L)y_t = \Delta y_t$ とおき , 単位根検定のためのモデルとして , 次の 2 つを考える .

$$\text{モデル A: } \Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

$$\text{モデル B: } \Delta y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 t + \sum_{j=1}^p \gamma_j \Delta y_{t-j} + \varepsilon_t$$

(注) これらは , Dickey-Fuller 検定を行うためのモデルである . ラグの次数 p は , モデル推定後の残差が無相関となるように選ぶ .

検定方法 : モデル (A) および (B) において , α_1 の LSE , t - 統計量 , トレンド項のパラメータを考慮した F - 統計量などを使う . 帰無仮説は $H_0 : \alpha_1 = 0$ (単位根あり) である . 棄却域は , LSE と t - 統計量による検定では左スソ , F - 検定では右スソ .

Note. 統計量の帰無分布は , 前節で述べたように正規分布などの通常の分布ではない . したがって , 検定の有意点は別に求める必要がある .

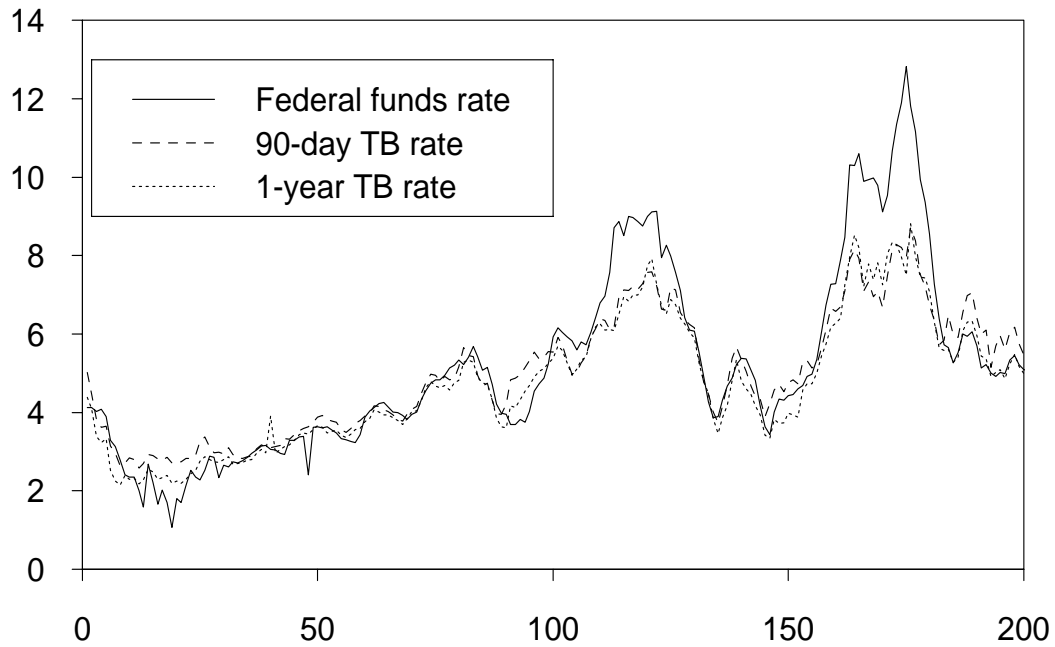
例 1 : 米国の 3 つの金融時系列に関する単位根検定

U_1 : Federal funds rate U_2 : 90-day TB rate U_3 : 1-year TB rate

Federal funds rate: 預金受け入れ金融機関が連邦準備銀行に預け入れる
準備預金の貸し出し金利

TB-rate: Treasury bill (財務省証券) の利回り

米国の3つの金融時系列 (1960/1-1979/8)



単位根検定の結果

```
|_sample 1 236
|_time 1960 12
|_read(fuller.dat) u1 u2 u3
```

```
|_coint u1 u2 u3
```

TOTAL NUMBER OF OBSERVATIONS = 236

VARIABLE : U1

DICKEY-FULLER TESTS - NO.LAGS = 3 NO.OBS = 232

NULL HYPOTHESIS	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%	

CONSTANT, NO TREND			
A(1)=0 T-TEST	-1.8890	-2.57	
A(0)=A(1)=0	1.9698	3.78	
			AIC = -1.929
			SC = -1.855

CONSTANT, TREND

A(1)=0 T-TEST	-3.2739	-3.13
A(0)=A(1)=A(2)=0	3.8328	4.03
A(1)=A(2)=0	5.5583	5.34

AIC = -1.953
SC = -1.864

VARIABLE : U2

DICKEY-FULLER TESTS - NO.LAGS = 6 NO.OBS = 229

NULL HYPOTHESIS	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%
-----------------	----------------	-------------------------

CONSTANT, NO TREND

A(1)=0 T-TEST	-1.0841	-2.57
A(0)=A(1)=0	1.3203	3.78

AIC = -2.236
SC = -2.116

CONSTANT, TREND

A(1)=0 T-TEST	-2.3481	-3.13
A(0)=A(1)=A(2)=0	2.4191	4.03
A(1)=A(2)=0	2.8843	5.34

AIC = -2.248
SC = -2.113

VARIABLE : U3

DICKEY-FULLER TESTS - NO.LAGS = 7 NO.OBS = 228

NULL HYPOTHESIS	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%
-----------------	----------------	-------------------------

CONSTANT, NO TREND

A(1)=0 T-TEST	-0.74899	-2.57
A(0)=A(1)=0	1.1766	3.78

AIC = -2.413
SC = -2.278

CONSTANT, TREND

A(1)=0 T-TEST	-2.2206	-3.13
A(0)=A(1)=A(2)=0	2.3636	4.03
A(1)=A(2)=0	2.6341	5.34

AIC = -2.426
SC = -2.275

(参考) 単位根検定のための SHAZAM プログラム

```
sample 1 236
time 1960 12
read(fuller.dat) u1 u2 u3
coint u1 u2 u3
stop
```

4 . Spurious regression と共和分分析

・ Spurious regression

2つの互いに独立な I(1) 系列 $\{x_t\}$ と $\{y_t\}$ に対して, 回帰式

$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t + \hat{\varepsilon}_t \quad (t = 1, \dots, T) \quad (2)$$

を考える. この回帰は spurious であるにもかかわらず, 次の事実が見出される.

(a) $\hat{\alpha} = O_p(\sqrt{T})$, $\hat{\beta} = O_p(1)$

(b) 係数の t -統計量 $= O_p(\sqrt{T})$

(c) 決定係数 $R^2 = O_p(1)$

これらの事実 (a), (b), (c) は, 回帰関係 (2) がもっともらしいことを誤って示唆している. 唯一のシグナルは DW 統計量であり, 回帰が spurious であれば非常に小さな値をとる.

I(1) 系列間で回帰関係を考えるときは, 回帰が spurious であるかどうかには注意せよ. チェック手段は, DW 統計量である. 実際, 回帰が spurious であれば,

$$DW = O_p\left(\frac{1}{T}\right)$$

例 2 : Spurious regression

互いに独立な 2 つの I(1) 系列

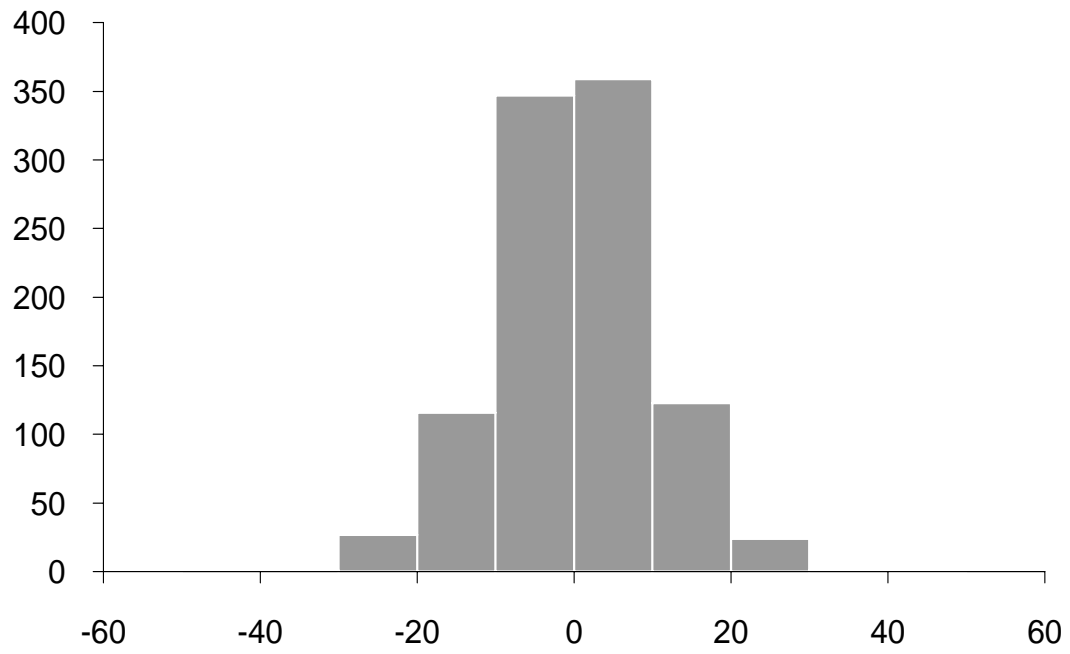
$$\Delta x_t = u_t, \quad \Delta y_t = v_t, \quad (t = 1, \dots, T)$$

をコンピュータで生成し, 回帰式

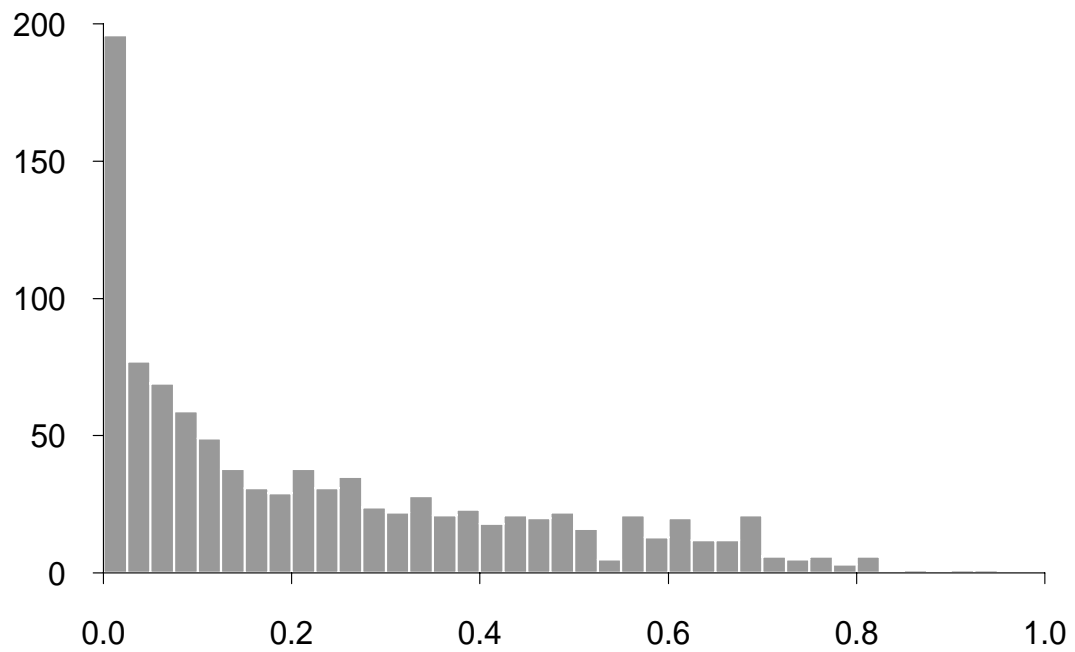
$$y_t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_t + \hat{\varepsilon}_t$$

を考える. 次の図は, $T = 200$, 繰り返し数=1,000 の場合の $\hat{\beta}$ の t -統計量と決定係数 R^2 の分布である. とともに, 回帰がもっともらしいことを示唆している.

$\hat{\beta}$ の t -統計量の分布



決定係数 R^2 の分布



共和分の定義：複数の I(1) 系列 y_{t1}, \dots, y_{tK} の適当な線形結合が定常過程 (I(0)) となると
 き、これらの I(1) 系列は cointegrate (共和分) しているという。Cointegration は、任意の複
 数個の I(d) 系列間で定義される。

・ 共和分の検定

共和分検定のためのモデルとして、次の 2 つを考える。

$$\text{モデル A: } y_{t1} = \beta_0 + \sum_{j=2}^K \beta_j y_{tj} + u_t$$

$$\text{モデル B: } y_{t1} = \beta_0 + \beta_1 t + \sum_{j=2}^K \beta_j y_{tj} + u_t$$

上の 2 つのモデルを推定して、残差の単位根検定を行う。すなわち、モデル

$$\Delta \hat{u}_t = \delta \hat{u}_{t-1} + \sum_{j=1}^p \phi_j \Delta \hat{u}_{t-j} + v_t$$

に対して単位根検定を行う。

例 3：米国の 3 つの金融時系列の間の共和分検定

U_1 : Federal funds rate U_2 : 90-day TB rate U_3 : 1-year TB rate

U1, U2, U3 の間の共和分関係

COINTEGRATING REGRESSION - CONSTANT, NO TREND NO.OBS = 236
 REGRESSAND : U1

R-SQUARE = 0.9333 DURBIN-WATSON = 0.5170

DICKEY-FULLER TESTS ON RESIDUALS - NO.LAGS = 6 M = 3

TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%
-------------------	----------------------------

 NO CONSTANT, NO TREND

T-TEST	-3.6597	-3.45	… 単位根の存在を棄却 共和分関係ありと判断
			AIC = -1.704
			SC = -1.599

 COINTEGRATING REGRESSION - CONSTANT, TREND NO.OBS = 236
 REGRESSAND : U1

R-SQUARE = 0.9361 DURBIN-WATSON = 0.5317

DICKEY-FULLER TESTS ON RESIDUALS - NO.LAGS = 6 M = 3

	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%	

NO CONSTANT, NO TREND			
T-TEST	-3.5704	-3.84	… 単位根の存在を受容 共和分関係なしと判断
			AIC = -1.713
			SC = -1.608

U2 と U3 の間の共和分関係

COINTEGRATING REGRESSION - CONSTANT, NO TREND NO.OBS = 236
REGRESSAND : U2

R-SQUARE = 0.9729 DURBIN-WATSON = 0.3970

DICKEY-FULLER TESTS ON RESIDUALS - NO.LAGS = 5 M = 2

	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%	

NO CONSTANT, NO TREND			
T-TEST	-3.6246	-3.04	… 単位根の存在を棄却 共和分関係ありと判断
			AIC = -3.417
			SC = -3.328

COINTEGRATING REGRESSION - CONSTANT, TREND NO.OBS = 236
REGRESSAND : U2

R-SQUARE = 0.9764 DURBIN-WATSON = 0.4974

DICKEY-FULLER TESTS ON RESIDUALS - NO.LAGS = 5 M = 2

	TEST STATISTIC	ASY. CRITICAL VALUE 10%	

NO CONSTANT, NO TREND			
T-TEST	-4.6534	-3.50	… 単位根の存在を棄却 共和分関係ありと判断
			AIC = -3.360
			SC = -3.271

(参考) 共和分検定のための SHAZAM プログラム

```
sample 1 236
time 1960 12
read(fuller.dat) u1 u2 u3
coint u1 u2 u3/type=resd
coint u2 u3/type=resd
stop
```