第８章「ＧＡＲＣＨモデルによる分析」

１．ARCH モデル

$\{y_t\}$ を金融時系列（例えば，株価，為替レートなど）とするとき，

$$x_t = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$$

を**収益率**と呼ぶ．収益率は，対数値の差分にほぼ等しい．なぜなら，

$$\begin{aligned}\log y_t - \log y_{t-1} &= \log \frac{y_t}{y_{t-1}} \\ &= \log\left[1 + \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}\right] \\ &\cong \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \text{収益率}\end{aligned}$$

収益率の平均は 0 と仮定される．i.i.d. ならば，対数値系列は単位根モデルに従う．しかし，ここでは**マルチンゲール差**とする．

マルチンゲール差（Martingale Differences）：
確率過程 $\{x_t\}$ において，過去の値が与えられたときの条件付き期待値が 0 のとき，すなわち，

$$E(x_t|x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_1) = 0$$

が成り立つとき，$\{x_t\}$ はマルチンゲール差の系列であるという．条件付き分散

$$V(x_t|x_{t-1}, x_{t-2}, \cdots, x_1) = \sigma_t^2$$

が存在すれば，マルチンゲール差は無相関の系列となる．しかし，必ずしも独立系列ではない．

収益率 $\{x_t\}$ が次のモデルに従うとき，$\{x_t\}$ は **ARCH(1)** に従うという．

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{NID}(0,1)$$

ここで，$\{\varepsilon_t\}$ は x_{t-1}, x_{t-2}, ... と独立である．ARCH とは，AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity の略であり，その由来は

$$x_t^2 = \sigma_t^2 + \left(x_t^2 - \sigma_t^2\right) = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + u_t, \tag{1}$$

のように，$\{x_t^2\}$ が AR(1) で表され，かつ，x_t^2 の条件付き期待値（$=x_t$ の条件付き分散$=\sigma_t^2$）が不均一であることによる．なお，

$$u_t = x_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2\left(\varepsilon_t^2 - 1\right)$$

も，$\{x_t\}$ と同様にマルチンゲール差である．

(1) の x_t^2 が定常となるための条件： $\alpha_0 > 0, \quad 0 \le \alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$
このとき，

$$E(x_t^2) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = V(x_t), \quad V(x_t^2) = \frac{2\alpha_0^2}{(1-\alpha_1)^2(1-3\alpha_1^2)}$$

・ARCH(1) モデルの推定

推定すべきパラメータは α_0 と α_1 であり，(1) から LSE で推定可能．しかし，MLE の方が優れている．MLE は，対数尤度関数

$$\begin{aligned}\log f(x_1,\ \cdots,\ x_T) &= \sum_{t=1}^{T} \log f(x_t|x_{t-1},\ \cdots,\ x_1) \\ &= -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log(\alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{x_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2}\end{aligned}$$

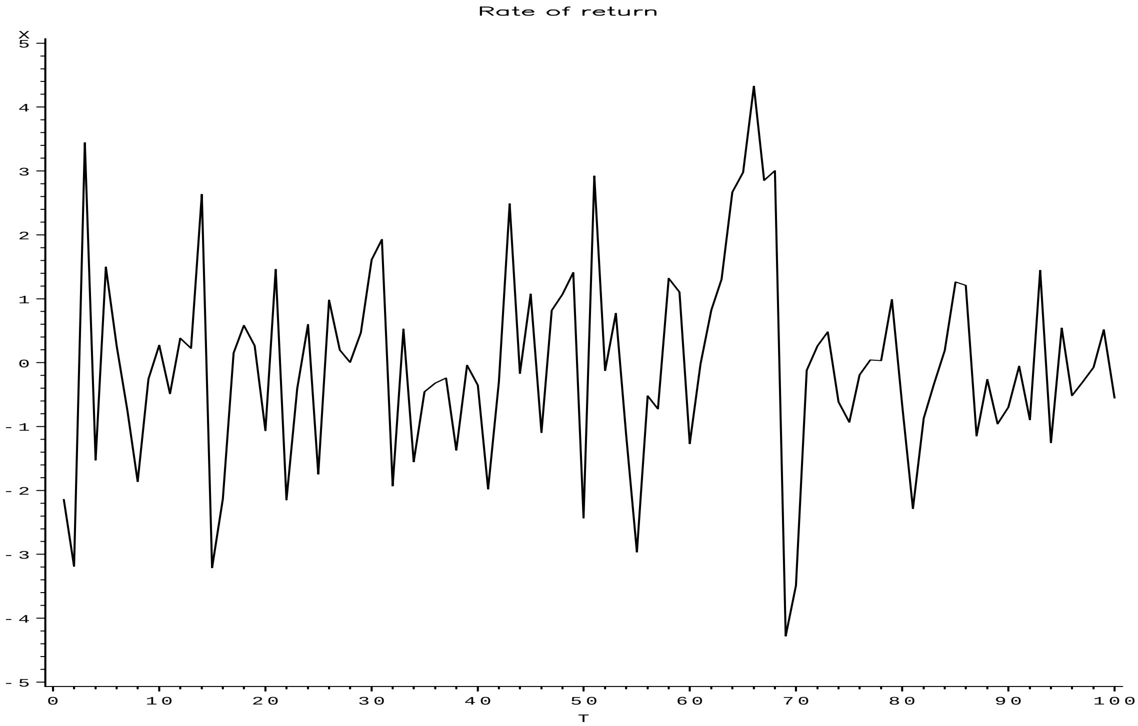
を最大にする値である．

例１： 次のページに図示された 100 個からなる収益率データ（単位：%）は，コンピュータにより

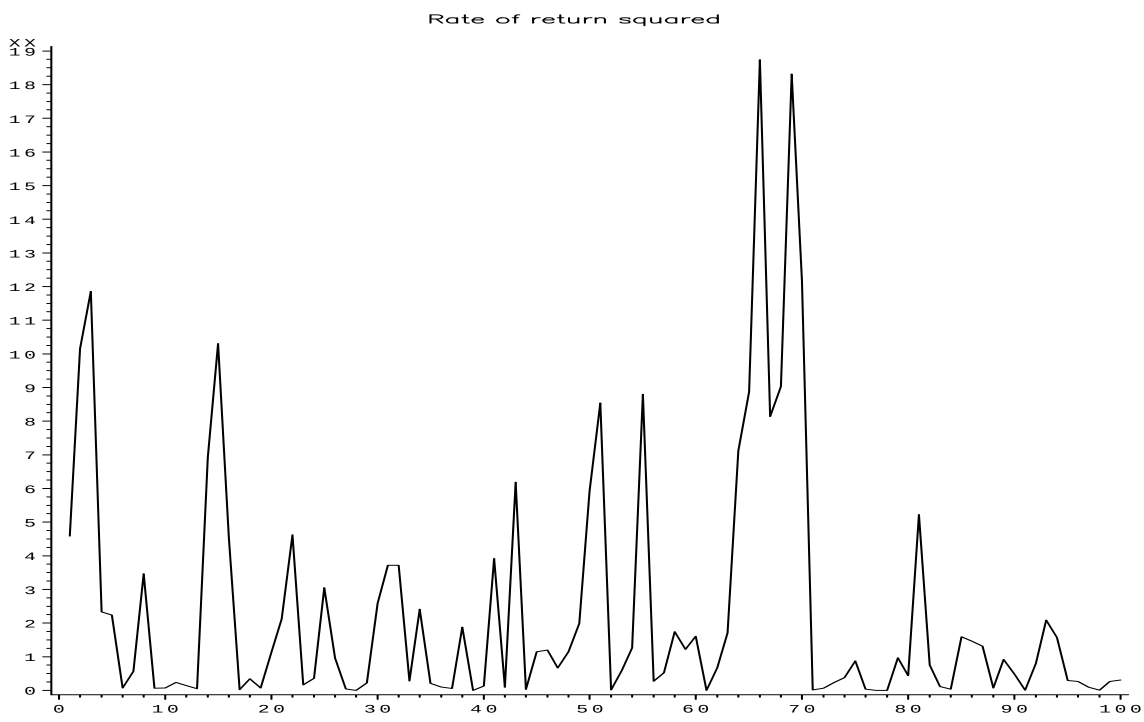
$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2$$

から生成されたものである．ここで，$\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0.5$, $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{NID}(0,1)$ である．このデータに対して，ARCH(1) モデルによる分析を行ってみよう．

収益率データ



収益率の 2 乗のデータ



予備的分析結果：収益率自体

```
                 Name of variable = X.

                 Mean of working series = -0.05017
                 Standard deviation     = 1.542258
                 Number of observations =      100

                         Autocorrelations

Lag Covar   Corr     -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
  0 2.37856 1.00000  |                    |********************|
  1 0.24315 0.10223  |                .   |** .                |
  2 0.13814 0.05808  |                .   |*  .                |
  3 -0.2372 -.09971  |                . **|   .                |
  4 -0.2745 -.11541  |                . **|   .                |
  5 -0.1088 -.04574  |                .  *|   .                |
  6 -0.0465 -.01956  |                .   |   .                |
  7 0.09902 0.04163  |                .   |*  .                |
  8 -0.1537 -.06463  |                .  *|   .                |
  9 -0.0284 -.01196  |                .   |   .                |
 10 -0.2568 -.10797  |                . **|   .                |
 11 -0.3369 -.14163  |                .***|   .                |
 12 -0.1293 -.05435  |                .  *|   .                |
 13 -0.0296 -.01242  |                .   |   .                |
 14 0.36398 0.15303  |                .   |***.                |
 15 0.08267 0.03475  |                .   |*  .                |
 16 0.00858 0.00361  |                .   |   .                |
 17 -0.0438 -.01840  |                .   |   .                |
 18 0.10548 0.04435  |                .   |*  .                |
 19 0.19784 0.08318  |                .   |** .                |
 20 0.21609 0.09085  |                .   |** .                |
 21 0.22172 0.09322  |                .   |** .                |
 22 -0.1063 -.04469  |                .  *|   .                |
 23  0.0005 0.00021  |               .    |    .               |
 24 -0.2576 -.10832  |               .  **|    .               |
                            "." marks two standard errors
```

予備的分析結果：収益率の 2 乗の系列

```
MEAN OF SERIES =   2.381
VARIANCE OF SERIES =   14.08
STANDARD DEVIATION OF SERIES =   3.752

 R-SQUARE =  0.3046     R-SQUARE ADJUSTED =  0.2975
```

```
VARIANCE OF THE ESTIMATE-SIGMA**2 =   9.8810
STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE-SIGMA =   3.1434
AKAIKE INFORMATION CRITERIA -AIC(K) =   2.3306
SCHWARZ CRITERIA- SC(K) =   2.3827

             PARAMETER ESTIMATES        STD ERROR     T-STAT
              AR( 1)   0.55355         0.8410E-01      6.582
            CONSTANT    1.0629         0.3718          2.859
```

ARCH(1) モデルのパラメータの最尤推定量

```
FINAL STATISTICS :
LOG-LIKELIHOOD FUNCTION=   -171.6669
COEFFICIENTS
 -0.7620487E-01  0.9699640      0.5844919
GRADIENT
  0.6997699E-02 -0.5054584E-02  0.4353727E-03

SQUARED CORR. COEF. BETWEEN OBSERVED AND PREDICTED   0.00000

ASY. COVARIANCE MATRIX OF PARAMETER ESTIMATES IS ESTIMATED USING
THE INFORMATION MATRIX

LOG OF THE LIKELIHOOD FUNCTION = -171.667

                             ASYMPTOTIC
VARIABLE    ESTIMATED   STANDARD   T-RATIO           PARTIAL
  NAME     COEFFICIENT    ERROR   --------    P-VALUE   CORR.

         MEAN EQUATION:
CONSTANT -0.76205E-01 0.11030     -0.69087     0.4896  -0.0700
         VARIANCE EQUATION:
ALPHA_    0.96996     0.21552       4.5006     0.0000   0.4156
ALPHA_    0.58449     0.19297       3.0290     0.0025   0.2940
```

（参考）ARCH モデル推定のための SHAZAM プログラム

```
sample 1 100
read(return.dat) x
genr x2=x*x
arima x2/nar=1
het x/presamp arch=1
stop
```

2．GARCH モデル

ARCH(1) モデルを拡張した次のモデル

$$\begin{aligned} x_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{NID}(0,1) \\ \sigma_t^2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p x_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_q \sigma_{t-q}^2 \end{aligned}$$

を GARCH(p,q) モデルという.

定理 $\{x_t\}$ が GARCH(p,q) モデルに従うとき，$\{x_t^2\}$ は ARMA(r,q) モデルに従う．ただし，$r = \max(p,q)$ である.

[証明] $u_t = x_t^2 - \sigma_t^2 = \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)$ とおくと，$\{u_t\}$ はマルチンゲール差となる．そして，r=p のとき，

$$\begin{aligned} x_t^2 &= \sigma_t^2 + (x_t^2 - \sigma_t^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p x_{t-p}^2 + \beta_1(x_{t-1}^2 - u_{t-1}) + \cdots + \beta_q(x_{t-q}^2 - u_{t-q}) + u_t \\ &= \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)x_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p x_{t-p}^2 + u_t - \beta_1 u_{t-1} - \cdots - \beta_q u_{t-q} \end{aligned}$$

を得る．これは，ARMA(p,q) の形である．r=q のときは ARMA(q,q) となることがわかる.

例２：GARCH モデルの推定 例１のデータに対して GARCH(1,1) モデルをあてはめた結果は次の通りである.

```
FINAL STATISTICS :
LOG-LIKELIHOOD FUNCTION=   -171.5426
COEFFICIENTS
 -0.5065512E-01   1.088327      0.6060171     -0.6814119E-01
GRADIENT
  0.2108101E-02 -0.1923549E-02 -0.5379443E-02 -0.4818360E-02

                             ASYMPTOTIC
VARIABLE    ESTIMATED   STANDARD   T-RATIO           PARTIAL
  NAME     COEFFICIENT    ERROR    --------    P-VALUE   CORR.

         MEAN EQUATION:
CONSTANT -0.50655E-01 0.10888     -0.46525     0.6418  -0.0474
         VARIANCE EQUATION:
ALPHA_     1.0883      0.33323      3.2659     0.0011   0.3162
ALPHA_    0.60602      0.19176      3.1603     0.0016   0.3070
PHI_     -0.68141E-01 0.10344     -0.65876     0.5100  -0.0671
```

（参考）GARCH(1,1) モデル推定のための SHAZAM プログラム

```
sample 1 100
read(return.dat) x
het x/presamp arch=1 garch=1
stop
```