第 9 章「S V モ デ ル と カ ル マ ン ・ フ ィ ル タ ー」

1．Stochastic Volatility モデル

時点 t における収益率を x_t とするとき，次のモデルを **SV（Stochastic Volatility: 確率的ボラティリティー）モデル**という．

SV モデル（Stochastic Volatility Model）：

$$x_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad \log \sigma_t^2 = \gamma + \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \eta_t, \tag{1}$$

$$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{NID}(0,1), \quad \{\eta_t\} \sim \mathrm{NID}(0, \sigma_\eta^2)$$

ここで，$\{\varepsilon_t\}$ と $\{\eta_t\}$ は互いに独立．したがって，$\{\varepsilon_t\}$ と $\{\sigma_t\}$ も互いに独立．SV モデルは Taylor モデルとも呼ばれる．

2．SV モデルの推定

SV モデルにはパラメータ γ, ϕ, σ_η^2 が含まれている．これらを推定するために，SV モデルを次のように表現する．

$$\log x_t^2 = \mu + \log \sigma_t^2 + \xi_t, \quad \log \sigma_t^2 = \gamma + \phi \log \sigma_{t-1}^2 + \eta_t, \tag{2}$$

ここで，$\mu = E(\log \varepsilon_t^2)$, $\xi_t = \log \varepsilon_t^2 - E(\log \varepsilon_t^2)$．パラメータ μ は次のように正確に計算可能．まず，ε_t^2 が自由度 1 の χ^2 分布に従うことから，$\varepsilon_t^2 = W$ とおくとき，$\log W$ の積率母関数（mgf）は

$$\begin{aligned}
m(\theta) &= E(e^{\theta \log W}) = E(W^\theta) \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} w^{\theta-1/2}\, e^{-w/2}\, dw = \frac{2^{\theta+1/2}\Gamma(\theta+1/2)}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{w^{\theta-1/2}\, e^{-w/2}\, dw}{2^{\theta+1/2}\Gamma(\theta+1/2)} \\
&= \frac{2^{\theta+1/2}\Gamma(\theta+1/2)}{\sqrt{2\pi}}
\end{aligned}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{d}{d\theta}\left[\log m(\theta)\right]_{\theta=0} \\
&= \frac{d}{d\theta}\left[(\theta+1/2)\log 2 + \log \Gamma(\theta+1/2) - \log \sqrt{2\pi}\right]_{\theta=0} \\
&= \log 2 + \frac{\Gamma'(1/2)}{\Gamma(1/2)} = \log 2 + \psi(1/2) \\
&= -1.270363
\end{aligned}$$

（注） $\psi(x) = d \log \Gamma(x)/dx$ であり，digamma 関数と呼ばれる．

さらに，

$$\begin{aligned}\sigma_\xi^2 &= V(\xi) = \frac{d^2}{d\theta^2}\left[\log m(\theta)\right]_{\theta=0} \\ &= \frac{d}{dx}\left[\psi(x)\right]_{x=1/2} = \psi'(1/2) = \frac{\pi^2}{2} \\ &= 4.9348\end{aligned}$$

（注） $\psi'(x) = d\psi(x)/dx$ は trigamma 関数と呼ばれる．

SV モデルの性質

(a) 収益率 $\{x_t\}$ の条件付き分布は nonnormal
(b) 厳密な尤度関数を導出することは不可能
(c) $\log x_t^2$ は ARMA(1,1) モデル

$$\log x_t^2 = \phi \log x_{t-1}^2 + \mu(1-\phi) + \gamma + \eta_t + \xi_t - \phi\xi_{t-1}$$

に従う．ここで，η_t は normal，しかし ξ_t は nonnormal.

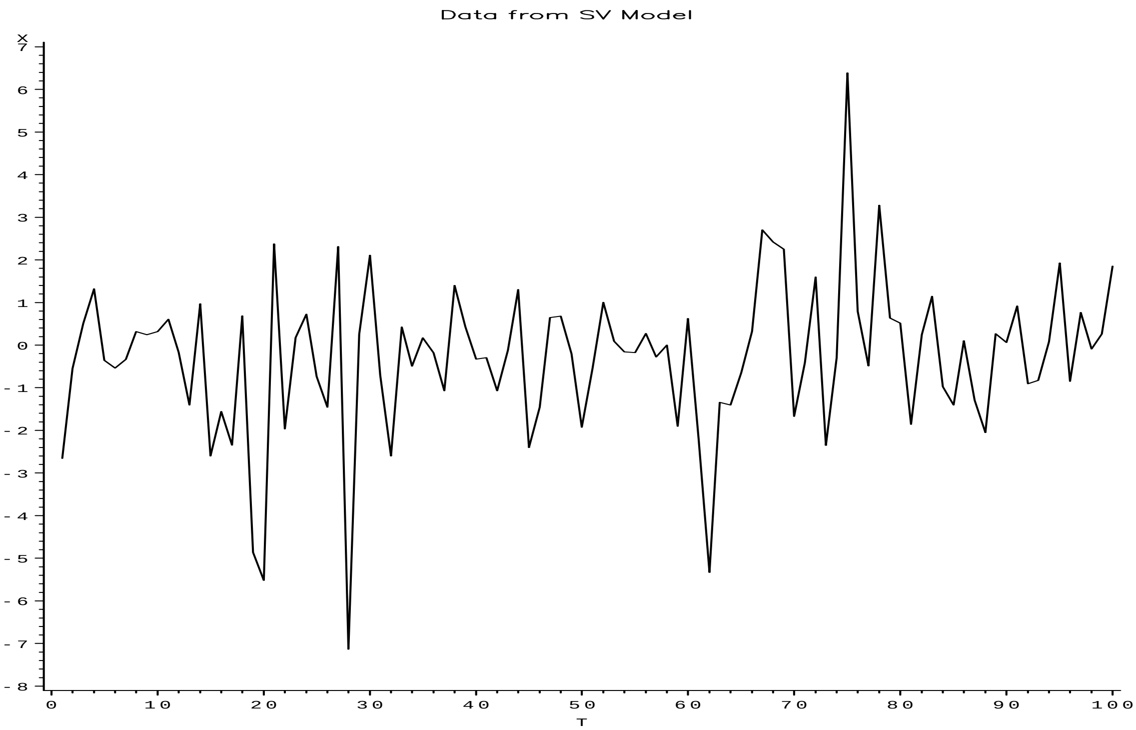
例１： コンピュータで生成した SV モデルからの 100 個のデータの系列 $\{x_t\}$ と，それを変換した系列 $\{\log x_t^2\}$ が次のページに図示されている．$\{x_t\}$ は，

$$x_t = \sigma_t\varepsilon_t, \quad \log\sigma_t^2 = \phi\log\sigma_{t-1}^2 + \eta_t, \quad \phi = 0.6$$

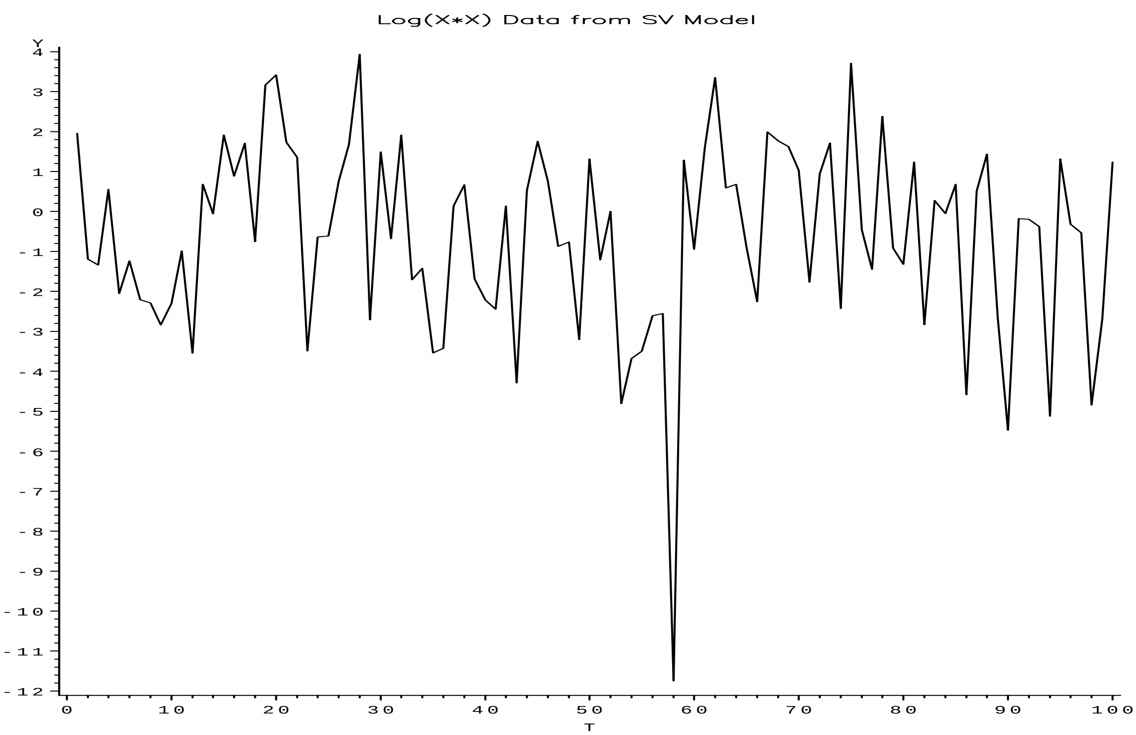
$$\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{NID}(0,1), \quad \{\eta_t\} \sim \mathrm{NID}(0,\sigma_\eta^2), \quad \sigma_\eta^2 = 1$$

から生成されたものである．前述のように，$\{\log x_t^2\}$ は ARMA(1,1) に従うが，誤差項は nonnormal である．図の系列にも normal の場合には見られないような outlier が存在する．

SV Model からの収益率データ



$\{\log x_t^2\}$ に変換されたデータ



非正規性を無視した最尤推定

```
                  Name of variable = Y = 原系列の 2 乗の対数値

                  Mean of working series = -0.65155
                  Standard deviation     = 2.389239
                  Number of observations =      100

                          Autocorrelations

  Lag Covar   Corr     -1 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1
    0 5.70846 1.00000  |                    |********************|
    1 0.64595 0.11316  |                .   |** .                |
    2  0.7962 0.13948  |                .   |***.                |
    3 0.38575 0.06757  |                .   |*  .                |
    4 0.56572 0.09910  |                .   |** .                |
    5  0.5304 0.09291  |                .   |** .                |
    6 0.09337 0.01636  |                .   |   .                |
    7 -0.2401 -.04206  |                .  *|   .                |
    8 0.26546 0.04650  |                .   |*  .                |
    9 -0.5944 -.10413  |                . **|   .                |
   10 -0.5146 -.09014  |                . **|   .                |
   11 -0.4924 -.08626  |                . **|   .                |
   12 -0.0574 -.01006  |                .   |   .                |
   13 -0.0949 -.01663  |                .   |   .                |
   14 -0.5001 -.08761  |                . **|   .                |
   15 -0.4605 -.08067  |                . **|   .                |
   16 -0.0828 -.01451  |                .   |   .                |
   17 -0.1128 -.01977  |                .   |   .                |
   18 0.08756 0.01534  |                .   |   .                |
   19 -0.2946 -.05161  |                .  *|   .                |
   20 -0.6611 -.11581  |                . **|   .                |
   21 -1.0407 -.18231  |                ****|   .                |
   22 -0.1692 -.02964  |               .   *|    .               |
   23 -0.3377 -.05916  |               .   *|    .               |
   24 0.16488 0.02888  |               .    |*   .               |

                    Maximum Likelihood Estimation

                                     Approx.
          Parameter   Estimate     Std Error   T Ratio  Lag
          MU          -0.64809       0.34482     -1.88   0
          MA1,1        0.62323       0.36748      1.70   1
          AR1,1        0.74190       0.31523      2.35   1

          Constant Estimate  = -0.1672691

          Variance  Estimate = 5.69998245
```

```
Std Error Estimate =  2.3874636
```

SV モデルは最尤推定が困難であるので，**GMM** (Generalized Method of Moments) や擬似最尤推定（Quasi ML）などの方法が提案されている．ここでは，次節で**状態空間モデル**を使った擬似最尤推定を考える．

3．状態空間モデル（State Space Model）

観測値 y_t が

$$\begin{aligned} \textbf{観測方程式：} \quad y_t &= \beta_t + \varepsilon_t \\ \textbf{状態方程式：} \quad \beta_t &= \delta + \rho\beta_{t-1} + \eta_t \end{aligned}$$

と表されるものとする．ここで，

(a) β_t は観測不可能な確率変数（**状態変数**）である．
(b) 誤差項 ε_t と η_t は互いに独立である．
(c) $\{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{NID}(0,\sigma^2)$, $\{\eta_t\} \sim \mathrm{NID}(0,\lambda\sigma^2)$

このモデルを**状態空間モデル**あるいは **Signal plus Noise Model** という．状態空間モデルには，パラメータ δ, ρ, λ, σ^2 が含まれているが，これらが既知ならば，状態変数 β_t は各時点ごとに逐次的に推定することができる．そのためのアルゴリズムは**カルマン・フィルター**と呼ばれる．今,

$\beta(t|s) = E(\beta_t|y_s,\cdots,y_1)$: 時点 s までのデータに基づく β_t の条件付き期待値

とすると，カルマン・フィルターは次のように計算される（第 3 章で述べた射影の考え方を使えば導出できる）．

$$\begin{aligned} \beta(t|t-1) &= \delta + \rho\beta(t-1|t-1) \\ \beta(t|t) &= \beta(t|t-1) + \frac{P(t|t-1)}{1+P(t|t-1)}(y_t - \beta(t|t-1)) \\ P(t|t-1) &= \rho^2 P(t-1|t-1) + \lambda \\ P(t|t) &= \frac{P(t|t-1)}{1+P(t|t-1)} \end{aligned}$$

ここで，$P(t|s) = E(\beta(t|s)-\beta_t)^2/\sigma^2$ ($\beta(t|s)$ の MSE) である．

カルマン・フィルターの導出

第 3 章で述べた射影の考え方を使う．まず,

$$\beta(t|t-1) = \Pi(\delta + \rho\beta_{t-1} + \eta_t|y_{t-1},\cdots,y_1) = \delta + \rho\beta(t-1|t-1)$$

を得る．次に，再帰的射影（**recursive projection**）に関する定理（ p.23 定理 4）

$$\Pi(y|\Omega,x) = \Pi(y|\Omega) + \Pi\left(y - \Pi(y|\Omega)|x - \Pi(x|\Omega)\right)$$

により，

$$\begin{aligned}\beta(t|t) &= \Pi(\beta_t|y_t, y_{t-1}, \cdots, y_1)\\ &= \Pi(\beta_t|y_{t-1}, \cdots, y_1) + \Pi\left[\beta_t - \Pi(\beta_t|y_{t-1}, \cdots, y_1)|y_t - \Pi(y_t|y_{t-1}, \cdots, y_1)\right]\\ &= \beta(t|t-1) + \Pi\left[\beta_t - \beta(t|t-1)|\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\right]\end{aligned}$$

を得る．ここで，

$$\Pi\left[\beta_t - \beta(t|t-1)|\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\right] = a_0 + a_1\left[\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\right]$$

とすると，a_0, a_1 は次の正規方程式をみたす．

$$E\left[\beta_t - \beta(t|t-1) - a_0 - a_1\{\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\}\right] = 0$$

$$E\left[\{\beta_t - \beta(t|t-1) - a_0 - a_1\{\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\}\}\left(\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\right)\right] = 0$$

このことから，

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = \frac{V(\beta_t - \beta(t|t-1))}{V(\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t)} = \frac{\sigma^2 P(t|t-1)}{\sigma^2 P(t|t-1) + \sigma^2}$$

となる．したがって，

$$\begin{aligned}\beta(t|t) &= \beta(t|t-1) + a_1\left[\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t\right]\\ &= \beta(t|t-1) + \frac{P(t|t-1)}{1 + P(t|t-1)}(y_t - \beta(t|t-1))\end{aligned}$$

を得る．次に，

$$\begin{aligned}\sigma^2 P(t|t-1) &= E(\beta_t - \beta(t|t-1))^2\\ &= E\left[(\rho(\beta_{t-1} - \beta(t-1|t-1)) + \eta_t)^2\right]\\ &= \sigma^2\left[\rho^2 P(t-1|t-1) + \lambda\right]\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\sigma^2 P(t|t) &= E(\beta_t - \beta(t|t))^2\\ &= E\left[\left\{\beta_t - \beta(t|t-1) - \frac{P(t|t-1)}{1 + P(t|t-1)}(y_t - \beta(t|t-1))\right\}^2\right]\\ &= E\left[\left\{\beta_t - \beta(t|t-1) - \frac{P(t|t-1)}{1 + P(t|t-1)}(\beta_t - \beta(t|t-1) + \varepsilon_t)\right\}^2\right]\\ &= E\left[\left\{\frac{1}{1 + P(t|t-1)}(\beta_t - \beta(t|t-1) - P(t|t-1)\varepsilon_t)\right\}^2\right]\\ &= \sigma^2\left[\frac{P(t|t-1) + P^2(t|t-1)}{(1 + P(t|t-1))^2}\right]\\ &= \sigma^2\frac{P(t|t-1)}{1 + P(t|t-1)}\end{aligned}$$

を得る．

パラメータの推定

$\{y_t\}$ の条件付き分布は

$$y_t|y_{t-1},\cdots,y_1 \sim \mathrm{N}\left(\beta(t|t-1),\sigma^2(1+P(t|t-1)\right)$$

であるから，**対数尤度関数**は

$$L(\delta,\rho,\lambda,\sigma^2)=\text{const.}-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log\{\sigma^2(1+P(t|t-1))\}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=1}^{T}\frac{(y_t-\beta(t|t-1))^2}{1+P(t|t-1)} \tag{3}$$

で与えられる．これを最大化することにより推定可能．

Plackett アルゴリズム: カルマン・フィルターの原形

回帰モデル

$$\mathbf{y_n}=\mathbf{X_n}\beta+u, \qquad \mathbf{X_n}:\ n\times k\ (n>k)$$

における β の LSE $\hat{\beta}$ をデータの入手とともに update する計算式

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{\mathbf{n}} &= (\mathbf{X_n'X_n})^{-1}(\mathbf{X_n'y_n})\\ &= (\mathbf{X_{n-1}'X_{n-1}}+\mathbf{x_n x_n'})^{-1}(\mathbf{X_{n-1}'y_{n-1}}+\mathbf{x_n}y_n)\\ &= \hat{\beta}_{\mathbf{n-1}}+\mathbf{P_n x_n}(y_n-\mathbf{x_n'}\hat{\beta}_{\mathbf{n-1}})\end{aligned}$$

$$\mathbf{P_n}=\mathbf{P_{n-1}}-\frac{\mathbf{P_{n-1}x_n x_n' P_{n-1}}}{\mathbf{1}+\mathbf{x_n' P_{n-1} x_n}}$$

・SV モデルの場合

状態空間モデル

$$\log x_t^2=\mu+\log\sigma_t^2+\xi_t, \quad \log\sigma_t^2=\phi\log\sigma_{t-1}^2+\eta_t \tag{4}$$

を考える．これは，(2) の SV モデルで $\gamma=0$ としたものである．この場合，

$$\mu=-1.270363, \quad \sigma_\xi^2=V(\xi_t)=\pi^2/2$$

であるから，未知のパラメータは ϕ と $\lambda=V(\eta_t)/\sigma_\xi^2=\sigma_\eta^2\sigma_\xi^2/$ である．これらは，(3) の尤度関数の最大化により求めることができる．ただし，

$$y_t\to\log x_t^2-\mu, \quad \beta_t\to\log\sigma_t^2$$

と置きかえる．(4) の誤差項 $\{\xi_t\}$ や $\{\eta_t\}$ は正規分布に従わないので，尤度関数は擬似であるが，推定量の漸近的特性は正規分布の場合と同様である．