第 8 章　同時方程式モデル

計量経済学特有のモデルである同時方程式モデルは，形式的には回帰モデルと似ているが，本質的には異なっている．以下では，まず，その違いを明らかにする．そして，同時方程式モデルの固有な性質から生じる識別問題について議論する．さらに，同時方程式モデルに基づく適切な推測方法を，推定，検定および予測の観点から説明する．

1　同時方程式モデルの性質

同時方程式モデル（連立方程式モデルあるいは構造モデルともいう）：

経済現象は多くの変数が相互に絡み合って実現される．このことは，各々の変数は別のいくつかの変数の影響を受けるが，逆にこれらの変数もまたいくつかの変数の影響を受けて実現することを意味する．このような現象を確率モデルとして表現したもの

簡単な例：

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + \varepsilon_i \tag{1}$$

$$Y_i = C_i + I_i \tag{2}$$

ここで，C_i は消費，Y_i は可処分所得，I_i は投資とする．また，ε_i は $i.i.d.(0,\sigma^2)$ で正規分布に従う誤差項であるとする．α，β および σ^2 は**構造パラメータ**と呼ばれる．

内生変数：同時方程式モデルにおける他の変数の影響を受けると同時に，他の変数に影響を与える変数であり，確率的な変数（上の例では，C と Y）

外生変数：内生変数のような相互依存関係をもたずに，方程式の外部で決まる変数で，非確率的な変数（上の例では I）

先決変数：外生変数と**ラグ付き内生変数**の総称

構造方程式：同時方程式モデルにおける個々の方程式のこと．その経済的意味合いに応じて，行動方程式，制度方程式，技術方程式，恒等式などに大別される．(1) は経済主体の消費行動を描写する行動方程式であり，(2) は恒等式

同時方程式モデル (1)，(2) と回帰モデルの違い：

(2) を無視して (1) だけを取り上げると回帰モデルにほかならないが，(2) があるために，変数 Y_i は誤差項 ε_i と相関をもつことになる．実際，(1) と (2) を C_i と Y_i に関して解くと，

$$C_i = \pi_{10} + \pi_{11} I_i + \eta_{1i} \tag{3}$$

$$Y_i = \pi_{20} + \pi_{21} I_i + \eta_{2i} \tag{4}$$

が得られる．ただし，

$$\pi_{10} = \frac{\alpha}{1-\beta}, \qquad \pi_{11} = \frac{\beta}{1-\beta}, \qquad \eta_{1i} = \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_i \tag{5}$$

$$\pi_{20} = \pi_{10}, \qquad \pi_{21} = \frac{1}{1-\beta}, \qquad \eta_{2i} = \eta_{1i} \tag{6}$$

である．係数 π_{11} と π_{21} は，それぞれ消費と所得に対する投資乗数である．これより，明らかに

$$Cov(Y_i, \varepsilon_i) = Cov(\eta_{2i}, \varepsilon_i) = Cov(\frac{\varepsilon_i}{1-\beta}, \varepsilon_i) = \frac{\sigma^2}{1-\beta}$$

となる．

このように，同時方程式モデルにおいては，一般に，内生変数と誤差項は相関をもつことになる．このことから，構造パラメータの LSE に関しては，あまり好ましくない次の事実が成り立つ．

〔**例題 8.1**〕 同時方程式モデル（1），（2）において，内生変数 Y_i は定常的で，

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \overline{Y} = \mu, \qquad \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = Q, \qquad 0 < Q < \infty$$

をみたすものとする．このとき，サイズ n の標本から得られる α と β の LSE は，一致性をもたないことを示せ．

（解）まず，β の LSE $\hat{\beta}$ は，

$$\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)\left(C_i - \overline{C}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 = \beta + \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)\varepsilon_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

と表すことができる．ここで，

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)\varepsilon_i = Cov(Y_i, \varepsilon_i) = \frac{\sigma^2}{1-\beta}$$

であることと仮定から，

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\beta} = \beta + \frac{\sigma^2}{(1-\beta)Q}$$

を得る．右辺の値は常に β を上回っている．他方，α の LSE $\hat{\alpha}$ は，

$$\hat{\alpha} = \overline{C} - \hat{\beta}\overline{Y} = \alpha + \beta\overline{Y} + \overline{\varepsilon} - \hat{\beta}\overline{Y} = \alpha - \left(\hat{\beta} - \beta\right)\overline{Y} + \overline{\varepsilon}$$

と表されるから，

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \hat{\alpha} = \alpha - \frac{\mu\sigma^2}{(1-\beta)Q}$$

を得る．右辺の値は，μ が 0 でない限り，α とは異なる．通常は，μ が正の場合が多いが，その場合には α を下回る．

同時方程式バイアス： 上の同時方程式における LSE のように，同時方程式であるがゆえにもたらされる推定量のバイアスのこと．

誘導形：(3)，(4) のように，内生変数を先決変数および誤差項のみで表現したモデル．誘導形は同時方程式モデルから一意的に決められる．誘導形は，説明変数の中にラグ付き内生変数を含むことを除けば，説明変数と誤差項との独立性など，回帰モデルにおける古典的仮定をみたす．したがって，誘導形に含まれる係数パラメータの LSE や誤差項の分散の通常の推定量は常に一致性をもっている．

誘導形パラメータ：誘導形に含まれるパラメータ（上の例では $\pi_{10}, \pi_{11}, \pi_{20}, \pi_{21}$ および誤差項 η_{1i}，η_{2i} の分散）

2　識別問題

構造パラメータが誘導形パラメータから一意的に決められるとき，構造パラメータあるいは構造方程式は**識別可能**であるという．同時方程式モデル (1)，(2) においては，(5)，(6) の関係を構造パラメータに関して解くと，一意的な解

$$\alpha = \pi_{10}/\pi_{21}, \qquad \beta = \pi_{11}/\pi_{21}, \qquad \sigma^2 = (1-\beta)^2 V(\eta_{1i})$$

を得ることができる．したがって，構造パラメータ α，β，σ^2 は識別可能である．同じことであるが，構造方程式 (1) は識別可能である．なお，恒等式 (2) はパラメータを含まないから常に識別可能である．

識別不可能な例として，次の同時方程式モデルを考えてみよう．

$$Y_{1i} = \beta_{12}Y_{2i} + \gamma_{11}X_{1i} + \gamma_{12}X_{2i} + \varepsilon_{1i} \tag{7}$$

$$Y_{2i} = \beta_{21}Y_{1i} + \gamma_{21}X_{1i} + \gamma_{22}X_{2i} + \varepsilon_{2i} \tag{8}$$

ここで，Y_{1i} と Y_{2i} は内生変数，X_{1i} と X_{2i} は外生変数であり，特に $X_{1i} \equiv 1$ とする．また，誤差項 ε_{1i} と ε_{2i} は各 i ごとに独立，同一の 2 変数同時分布に従う確率変数である．

構造方程式 (7)，(8) の各々は，モデル全体に含まれている内生変数および外生変数をもれなく含んでおり，個々には何も問題がないように見える．しかし，変数をもれなく含むこと自体が問題なのである．この理由を考えてみよう．まず，誘導形は

$$Y_{1i} = \pi_{11}X_{1i} + \pi_{12}X_{2i} + \eta_{1i} \tag{9}$$

$$Y_{2i} = \pi_{21}X_{1i} + \pi_{22}X_{2i} + \eta_{2i} \tag{10}$$

のように表現される．ここで

$$\pi_{11} = \frac{\gamma_{11} + \beta_{12}\gamma_{21}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}, \qquad \pi_{12} = \frac{\gamma_{12} + \beta_{12}\gamma_{22}}{1-\beta_{12}\beta_{21}} \tag{11}$$

$$\pi_{21} = \frac{\gamma_{21} + \beta_{21}\gamma_{11}}{1-\beta_{12}\beta_{21}}, \qquad \pi_{22} = \frac{\gamma_{22} + \beta_{21}\gamma_{12}}{1-\beta_{12}\beta_{21}} \tag{12}$$

である．

係数パラメータのみに注目すると，誘導形の各々の方程式 (9)，(10) にはパラメータがそれぞれ 2 個しか含まれていない．にもかかわらず，(7)，(8) の構造方程式はそれぞれ 3 個のパラメータを含んでいる．したがって，誘導形パラメータから構造パラメータを一意的に決めることは無理であり，識別不可能である．

以上のことから，識別可能にするためには構造パラメータの個数を減らさなければな

らないことがわかる．そのために，係数パラメータに零制約をおき，右辺の変数を適当に除去するのが普通である．

i）$\gamma_{11}=\gamma_{22}=0$

構造方程式のパラメータはそれぞれ 2 個，誘導形パラメータは計 4 個となり，(11) と (12) の関係から，(7)，(8) はともに識別可能となることがわかる．

ii）$\gamma_{12}=\gamma_{21}=0$

i）と同様に，(7)，(8) ともに識別可能である．

iii）$\gamma_{12}=\gamma_{22}=0$

外生変数 X_{2i} がモデル全体から除外される．そして，同時方程式モデルは 4 個，誘導形は 2 個のパラメータを含むことになり，再び識別不可能な状況となる．

iv）$\beta_{12}=0$

(7) の右辺は内生変数を含まないので，(7) は誘導形でもあり，構造パラメータは誘導形パラメータと一致して，識別可能となる．実際，(11) から $\gamma_{11}=\pi_{11}$，$\gamma_{12}=\pi_{12}$ となる．しかし，(8) は識別不可能である．なぜなら，$\beta_{12}=0$ であっても，(12) における 2 本の方程式から (8) に含まれている 3 個の構造パラメータを決めることはできないからである．

v）$\beta_{21}=0$

iv）と同様の理由で (8) は識別可能，(7) は識別不可能となる．

vi）$\gamma_{11}=\gamma_{12}=0$

(7) から 2 つの外生変数が除去され，含まれるパラメータは β_{12} のみとなる．(11)，(12) より $\beta_{12}=\pi_{11}/\pi_{21}=\pi_{12}/\pi_{22}$ となり，(7) は識別可能である．ただし，複数の誘導形パラメータの組が同一の構造パラメータを与えている．このような識別可能性を**過剰識別**といい，今までの場合を**適度識別**という．なお，(8) は識別不可能である．

vii）$\gamma_{21}=\gamma_{22}=0$

vi)と同様の理由で，(7) は識別不可能，(8) は過剰識別である．

以上，簡単な例により構造方程式の識別可能性について見てきたが，一般に次の事実が成り立つことが知られている．

識別性のための必要条件

同時方程式モデルにおいて，当該の構造方程式が識別可能となるためには，

$$K-k\geq g-1$$

となることが必要である．ただし，K はモデル全体に含まれる先決変数の数，k は当該方程式に含まれる先決変数の数，g は当該方程式に含まれる内生変数の数である．

上の条件は識別可能のための必要条件であり，**次数条件**と呼ばれる．その意味すると

ころは，当該方程式が識別可能となるためには，右辺に含まれる内生変数と少なくとも同数の先決変数がその方程式から除外されていなければならない，ということである．この条件は推定の観点からも解釈が可能であり，それについては次節で述べる．上の例で示した識別不可能な場合には，次数条件が成立していないことを確かめられたい．なお，ここでは示さないが，識別可能のための必要十分条件は，係数の制約を表す行列の階数に関する条件（**階数条件**）で与えられる．

以下で推定方法を説明する際には各方程式は適度識別あるいは過剰識別であることを前提とする．

3　同時方程式モデルの推定

ここでは，同時方程式モデル (1) と (2) に即して構造パラメータの推定方法を説明する．目標は，(1) に含まれているパラメータ α と β の一致推定量を構成することである．

間接最小 2 乗（ILS）法

誘導形パラメータの最小 2 乗推定量を使って，間接的に求められる構造パラメータの推定量を**間接最小 2 乗**（**ILS**: Indirect Least Squares）**推定量**という．以下，区別するために，通常の LSE を **OLS**（Ordinary Least Squares）**推定量**と呼ぶことにする．

構造方程式 (1) におけるパラメータ α と β は，

$$\alpha = \pi_{10} / \pi_{21}, \qquad \beta = \pi_{11} / \pi_{21}$$

と表現される．誘導形パラメータの OLS 推定量は一致性をもつので，誘導形パラメータに OLS 推定量を代入して得られる ILS 推定量 $\hat{\alpha}_{ILS}$，$\hat{\beta}_{ILS}$ も一致性をもつことになる．これらの具体的表現が次のようになることを確かめられたい．

$$\hat{\alpha}_{ILS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2}{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})(Y_i - \bar{Y})}\bar{C} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})(C_i - \bar{C})}{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})(Y_i - \bar{Y})}\bar{I} \tag{13}$$

$$\hat{\beta}_{ILS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})(C_i - \bar{C})}{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})(Y_i - \bar{Y})} \tag{14}$$

ILS 法は，適度識別な方程式に対してのみ適切な推定法である．なぜなら，過剰識別の場合には誘導形パラメータの推定量から一意的な推定量を構成することができないからである．また，一般に求め方が繁雑であることから，以下で述べる他の方法ほどは用いられていない．

操作変数（IV）法

構造方程式 (1) においては，Y_i と ε_i が相関をもつことが OLS 推定量の一致性を妨げる要因である．そこで，(2) に含まれる外生変数 I_i を使って

$$\hat{\alpha}_{IV} = \overline{C} - \hat{\beta}_{IV}\overline{Y}, \quad \hat{\beta}_{IV} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \overline{I})(C_i - \overline{C})}{\sum_{i=1}^{n}(I_i - \overline{I})(Y_i - \overline{Y})} \tag{15}$$

により定義される推定量を考える．これらを α と β の**操作変数（IV: Instrumental Variables）推定量**という．

IV 推定量は，すでに第 7 章で説明したように，OLS 推定量を求めるための正規方程式において，説明変数との積を作る際に代理の変数（今の例では I_i）を使って得られるものである．今の場合には，まず，(1) から次の 2 つの方程式が得られる．

$$\sum_{i=1}^{n} C_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} 1 + \beta\sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \tag{16}$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_i C_i = \alpha\sum_{i=1}^{n} I_i + \beta\sum_{i=1}^{n} I_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} I_i \varepsilon_i \tag{17}$$

このとき，$\hat{\alpha}_{IV}$ と $\hat{\beta}_{IV}$ は右辺の誤差項を含む部分を 0 とした方程式の解にほかならない．

第 7 章では，IV 法を単一の回帰モデルに対して適用したが，一般には，構造方程式のように，誤差項と相関をもつような説明変数が含まれるモデルの推定に使うことができる．問題は，操作変数の選び方であるが，同時方程式モデルにおいては，当該方程式に含まれない先決変数がその候補となる．

2 段階最小 2 乗（2SLS）法

構造方程式 (1) を次のようにかきかえる．

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + \varepsilon_i = \alpha + \beta\hat{Y}_i + v_i, \qquad v_i = \varepsilon_i + \beta(Y_i - \hat{Y}_i) \tag{18}$$

ここで，$\hat{Y}_i$ は内生変数 Y_i の理論値であり，誘導形 (4) において OLS 推定量 $\hat{\pi}_{20}$，$\hat{\pi}_{21}$ を使って $\hat{Y}_i = \hat{\pi}_{20} + \hat{\pi}_{21} I_i$ により定義される．そして，(18) において，C_i を $X_i \equiv 1$ と $\hat{Y}_i$ に回帰することにより，α と β の LSE

$$\hat{\alpha}_{2SLS} = \overline{C} - \hat{\beta}_{2SLS}\overline{Y}, \quad \hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})(C_i - \overline{C})}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2} \tag{19}$$

が得られる．ここで，$\overline{Y} = \overline{\hat{Y}}$ である．

$\hat{\alpha}_{2SLS}$ と $\hat{\beta}_{2SLS}$ は 2 段階の OLS により得られる推定量であり，**2 段階最小 2 乗推定量**（2SLSE: Two Stage LSE）と呼ばれる．2SLSE は次のように正当化される．

まず，第 1 段階では Y_i の誘導形を OLS で推定して $\hat{Y}_i$ を求める．そして，(18) のように表現すると，$\hat{Y}_i$ は誤差項 $v_i = \varepsilon_i + \beta(Y_i - \hat{Y}_i)$ とほぼ無相関となる．実際，$\hat{Y}_i$ は残差 $Y_i - \hat{Y}_i$ とは常に無相関であり，ε_i とは漸近的に無相関になることがわかる．した

ここで考えた 3 つの推定法は，構造方程式のそれぞれを個別に推定する方式であり，**単一方程式推定法**と呼ばれる．単一方程式推定法には，以上のほかに最尤法に基づく推定法などがある．また，同時方程式全体を同時的に推定する方法として**体系推定法**があ

るが，その説明はここでは省略する．

4　推定量の分布

構造パラメータに関する信頼区間を構成したり検定を行うためには，推定量の分布を求めなければならない．しかしながら，推定量は，一般に確率変数である内生変数の複雑な関数となっており，誤差項が正規分布に従っていても，推定量の正確な分布は必ずしも正規分布とはならない．

例として，(19) の $\hat{\beta}_{2SLS}$ を考えよう．$\hat{Y}_i = \hat{\pi}_{20} + \hat{\pi}_{21} I_i$ および $\overline{Y} = \hat{\pi}_{20} + \hat{\pi}_{21}\bar{I}$ であることから，$\hat{\beta}_{2SLS}$ は

$$\hat{\beta}_{2SLS} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})(\beta Y_i + \varepsilon_i)}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2} = \beta + \frac{\hat{\pi}_{21}\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})\varepsilon_i}{\hat{\pi}_{21}^2\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2}$$

と表現することができる．ここで，仮定から $\hat{\pi}_{21}$ は π_{21} の一致推定量であり，ε_i は独立に $N(0,\sigma^2)$ に従う．また，I_i は仮定より非確率的であるが，ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - \bar{I}\right)^2 = A, \qquad 0 < A < \infty$$

が成り立つと仮定すれば，次の漸近分布が得られる．

$$\sqrt{n}\left(\hat{\beta}_{2SLS} - \beta\right) \quad \to \quad N\left(0, \sigma^2 \big/ \left(\pi_{21}^2 A\right)\right) \tag{20}$$

外生変数のほかにラグ付き内生変数を含むような一般の同時方程式モデルにおいては，外生変数に関する条件に加えて，内生変数の定常性の条件のもとで，2SLSE は漸近的に正規分布に従うことが知られている．

しかし，成長に関連する経済データに定常性を仮定することは適切でない場合が多い．そして，内生変数が非定常的ならば漸近的にも正規分布以外の分布に従うことがある．非定常性の問題については章をあらためて考えることにしたい．

5　同時方程式モデルの検定

前節の最後に述べたように，構造パラメータの推定は，先決変数が定常的である場合にのみ正規分布の議論が正当化される．このことは検定についても同様である．以下，推定の場合と同様に，同時方程式モデル (1)，(2) に即して説明する．

ここでは，構造方程式 (1) のパラメータ β に注目し，両側検定

$$H_0: \beta = \beta_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1: \beta \neq \beta_0$$

を考えよう．検定は β の 2SLSE $\hat{\beta}_{2SLS}$ に基づいて行うことにする．このとき，帰無仮説のもとで $\hat{\beta}_{2SLS}$ は漸近的に平均 β_0，分散 $V(\hat{\beta}_{2SLS})$ の正規分布に従う．ここで，分散 $V(\hat{\beta}_{2SLS})$ は，

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{2SLS}) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}$$

により推定することができる．ただし，$\hat{\sigma}^2$ は σ^2 の推定量であり，今の場合は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(C_i - \hat{\alpha}_{2SLS} - \hat{\beta}_{2SLS}Y_i)^2$$

により定義される．当然のことながら，$\hat{\sigma}^2$ は OLS に基づく推定量よりも大きめとなる．

検定統計量としては，回帰モデルの場合と同様に $(\hat{\beta}_{2SLS} - \beta_0)/\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_{2SLS})}$ を使うことができる．ただし，帰無仮説のもとでは漸近的に標準正規分布に従うものと考え，有意点についても正規分布に基づいて決めることになる．特に，$\hat{\beta}_{2SLS}/\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}_{2SLS})}$ は有意性検定のための t 統計量の意味合いをもつが，帰無仮説 $H_0{:}\beta = 0$ のもとでは標準正規分布に従うものと考える．

〔**例題** 8.2〕 **付録** 4 のマクロ経済に関する年次データに対して，次の同時方程式モデルを 2SLS 法で推定し，OLS 法による結果と比較せよ．

$$C_i = \alpha + \beta Y_i + \varepsilon_i$$
$$Y_i = C_i + S_i$$

ここで，C_i は家計消費支出，Y_i は家計可処分所得，S_i は家計貯蓄である．

（解）この同時方程式モデルは (1)，(2) と同様であるから適度識別である．推定結果は次のようになる．単位は兆円である．

OLS $c = -17.04 + 0.91y$ (-4.5) (50.8) $s = 4.09$

2SLS $c = -0.61 + 0.83y$ (-0.09) (24.4) $s = 5.64$

OLS による限界消費性向の値は 0.9 を越えており，2SLS による結果よりもかなり高くなっている．このことは，第 1 節で述べた OLS 推定量の同時方程式バイアスによるものと考えられる．推定結果から，平均消費性向は，所得の増加とともに OLS では若干の上昇傾向，2SLS ではほぼ一定である．また，2SLS による t 値の結果から，定数項は有意でないことがわかる．なお，OLS による t 値は，同時方程式モデルの想定が正しければ本来の t 値ではない．**図 8-2** には，実際のデータ（横軸：家計可処分所得，たて軸：家計消費支出）と推定された 2 つの回帰直線が示されている．また，**図 8-3** には 2 つの推定法から得られた残差がプロットされている．

次の例題は，上のモデルを若干変えて，家計可処分所得と家計貯蓄の代わりに，それぞれ GDE と民間投資を使い，民間投資を内生化した同時方程式モデルの推定である．

〔**例題** 8.3〕 **付録** 4 のマクロ経済に関する年次データに対して，次の同時方程式モデルを 2SLS 法で推定し，OLS 法による結果と比較せよ．

$$C_i = \alpha_1 + \beta Y_i + \varepsilon_{1i}$$
$$V_i = \alpha_2 + \gamma_{21}Y_{i-1} + \gamma_{22}V_{i-1} + \varepsilon_{2i}$$
$$Y_i = C_i + V_i + X_i$$

ここで，C_i は家計消費支出，Y_i は GDE，V_i は民間投資，X_i は政府支出等である．

（解）消費支出に関する構造方程式は過剰識別であることがわかる．この方程式に対す

る 2SLSE は，第 1 段階で Y_i の誘導形を OLS で推定し，Y_i の理論値 $\hat{Y}_i$ を求め，第 2 段階で C_i を定数項と $\hat{Y}_i$ に回帰することにより得られる．他方，民間投資に関する方程式は誘導形であり，2SLS と OLS 推定量は一致する．推定結果は次のようになる．

OLS

$$c = 13.48 + 0.54y$$

(5.7)　(68.8)　　$s = 3.03$

2SLS

$$c = 15.46 + 0.54y$$

(7.0)　(74.1)　　$s = 3.08$

OLS & 2SLS

$$v = -2.28 + 0.06y_{-1} + 0.81v_{-1}$$

(-0.5)　(1.4)　　(5.6)　　$s = 4.82$

GDE に対する限界消費性向の OLS 推定値は 2SLS の結果とほぼ同じである．他方，定数項の推定値は 2SLS の方が若干大きいので，平均消費性向は 2SLS の方がいくぶん大きめの値を与えることになる．

6　同時方程式モデルに基づく予測

同時方程式モデルを経済政策の評価や予測のために使うことができる．そのためには，同時方程式モデルを誘導形に変換する必要がある．

例題 8.3 の同時方程式モデルについて考えよう．民間投資の方程式は誘導形である．他方，消費支出の誘導形は

$$C_i = \alpha + \gamma_1 Y_{i-1} + \gamma_2 V_{i-1} + \delta X_i + \frac{1}{1-\beta}\varepsilon_{1i} + \frac{\beta}{1-\beta}\varepsilon_{2i}$$

と表される．ただし，

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \beta\alpha_2}{1-\beta}, \quad \gamma_1 = \frac{\beta\gamma_{21}}{1-\beta}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta\gamma_{22}}{1-\beta}, \quad \delta = \frac{\beta}{1-\beta}$$

以上から，誘導形に基づいて回帰モデルの場合と同様に予測を考えることができる．例えば，時点 n までのデータ，および時点 $n+1$ の外生変数の値 X_{n+1} が与えられたとき，

C_{n+1} の予測量 $\hat{C}_{n+1}$ は

$$\hat{C}_{n+1} = \alpha + \gamma_1 Y_n + \gamma_2 V_n + \delta X_{n+1}$$

となる．実際の予測においては，右辺のパラメータを 2SLSE でおきかえればよい．

誘導形は予測のために有用であることを見たが，内生変数の動学的性質を調べるためには，個々の内生変数を外生変数とそのラグのみで表す方が便利である．このような表現を**最終形**という．最終形については，第 6 章において，分布ラグ・モデルが ARX モデルの最終形として解釈できることを述べた．

例題 8.3 の同時方程式モデルを再び取り上げよう．そして，それぞれの構造方程式を外生変数とそのラグ，および左辺の内生変数のラグで表すことを考えよう．このとき，次の表現が得られる．

$$C_i = \frac{1}{1-\beta}\left[\alpha_1(1-\gamma_{21}-\gamma_{22}) + \alpha_2\beta + (\gamma_{21}+\gamma_{22}-\beta\gamma_{22})C_{i-1} + \beta X_i - \beta\gamma_{22}X_{i-1} + \eta_{1i}\right]$$

$$V_i = \frac{1}{1-\beta}\left[\alpha_1\gamma_{21} + \alpha_2(1-\beta) + (\gamma_{21} + \gamma_{22} - \beta\gamma_{22})V_{i-1} + \gamma_{21}X_{i-1} + \eta_{2i}\right]$$
$$Y_i = \frac{1}{1-\beta}\left[\alpha_1(1-\gamma_{22}) + \alpha_2 + (\gamma_{21} + \gamma_{22} - \beta\gamma_{22})Y_{i-1} + X_i - \gamma_{22}X_{i-1} + \eta_{3i}\right]$$

ここで，誤差項は

$$\eta_{1i} = \varepsilon_{1i} + \beta\varepsilon_{2i} - (\gamma_{21} + \gamma_{22})\varepsilon_{1,i-1}$$
$$\eta_{2i} = (1-\beta)\varepsilon_{2i} + \gamma_{21}\varepsilon_{1,i-1}$$
$$\eta_{3i} = \varepsilon_{1i} + \varepsilon_{2i} - \gamma_{22}\varepsilon_{1,i-1}$$

となり，$\{\eta_{1i}\}$ と $\{\eta_{3i}\}$ はもはや独立な系列ではなく，系列相関をもつことになる．ただし，$\{\eta_{2i}\}$ は独立である．

以上から，$\{C_i\}$ と $\{Y_i\}$ は ARMAX モデル，$\{V_i\}$ は ARX モデルに従うことがわかる．これらの表現から最終形を求めることは容易であり，乗数なども最終形から計算することができる．

なお，予測の方法としては，同時方程式モデルから導出される誘導形を使うのではなく，同時方程式とは無関係に最初からこのような時系列モデルを使うアプローチも提案されている．