フラクショナル ARIMA モデルに関する統計理論

一橋大学大学院経済学研究科　　田中　勝人

科研費シンポジウム「経済時系列，数理ファイナンスにおける統計推測の基礎理論」
1999 年 12 月 1 日 - 3 日開催（場所：東大駒場）のための原稿：同年 11 月 1 日作成

1　はじめに

「**単位根問題**」と「**共和分分析**」は，経済時系列に関する理論および実証研究のホットなトピックとして，1980 年代半ばから存続してきた．これらのトピックに関して，ここ 10 数年の間に書かれた論文・著書は数千に達するであろう．そして，その勢いは 21 世紀に入ってもしばらく続くであろう．

本稿の目的は，モデルのクラスを拡張した上で上記の問題を考えることである．すなわち，伝統的な ARIMA モデルをフラクショナル ARIMA (**ARFIMA**) モデルに拡げた上で，ARFIMA モデルの観点から「単位根問題」や「共和分分析」を考えてみよう，というわけである．以下では，そのために必要な統計理論について基本的なことがらを述べることにする．

ARFIMA モデル: 通常の ARIMA モデルにおいて，和分の次数を実数に拡張したものである．提唱者は，Granger and Joyeux (1980), Hosking (1981) である．具体的には，ARFIMA(p,d,q) モデルとは，Box and Jenkins (1970) の ARIMA(p,d,q) モデル

$$\phi(L)(1-L)^d y_t = \theta(L)\varepsilon_t \tag{1}$$

において，d を実数に拡張したモデルである．ここで，L はラグ・オペレータ，$\{\varepsilon_t\}$ は，独立，同一分布に従う誤差項で，平均 0，分散 σ^2，4 次までのモーメントをもつとする．また，

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p, \quad \theta(L) = 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q,$$

であり，$\phi(L)$ と $\theta(L)$ の零根は，すべて単位円外にあると仮定する．

d の存在範囲: d は $-1/2$ より大きい任意の実数値とする．このとき，d の値によって，次のような場合分けがなされている．

(a) $0 < |d| < 1/2$ のとき
定常長記憶（stationary long memory）系列．

(b) $d = 0$ のとき
定常短記憶（stationary short memory）系列．

(c) $d \geq 1/2$ のとき
非定常長記憶（nonstationary long memory）系列．特に $d = 1$ のとき，**単位根**（unit root）系列．

フラクショナル I(d) 過程:　d が非負の整数のとき，d 回の階差を施したらはじめて定常になるとき，その系列は I(d) 過程と呼ばれる．ARIMA(p, d, q) モデルは I(d) 過程に従う．これを，d が実数の場合に拡張したものは FI(d) 過程と呼ばれる．ARFIMA（p, d, q) モデルは，FI(d) 過程に従う．

定常性と反転可能性:　$u_t = \phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t$ とおくと，よく知られている (Granger and Joyeux 1980, Hosking 1981) ように，展開

$$y_t = (1-L)^{-d}u_t = \frac{1}{\Gamma(d)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)}u_{t-j} \tag{2}$$

は，$d < 1/2$ ならば平均 2 乗収束し，$\{y_t\}$ は定常となる．ただし，u_{t-j} の係数列は $0 < d < 1/2$ ならば絶対総和不可能である．また，$d > -1/2$ のとき反転可能となる．したがって，$|d| < 1/2$ ならば $\{y_t\}$ は定常かつ反転可能な系列となる．なお，$d \le -1/2$ ならば定常ではあるが反転不可能となる．また，$d \ge 1/2$ ならば反転可能であるが，非定常となる．

自己共分散: ARFIMA($0, d, 0$) ($0 < |d| < 1/2$) の場合には，自己共分散は

$$\begin{aligned}
\gamma_h &= Cov(y_t, y_{t-h}) \\
&= \frac{(-1)^h\Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-h-d)\Gamma(1+h-d)} = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(1+h-d)} \\
&= O(h^{2d-1}) \qquad (h \to \infty)
\end{aligned} \tag{3}$$

となる (Adenstedt 1974, Hosking 1981)．一般の ARFIMA(p, d, q) の場合の自己共分散の表現は複雑であるが，γ_h の $h \to \infty$ のときの挙動は ARFIMA($0, d, 0$) の場合と同様であり，減衰するスピードは hyperbolic で非常に遅い．特に，

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}|\gamma_j| = \infty \qquad (0 < d < 1/2)$$

となるので，$0 < d < 1/2$ の場合を **persistent** な定常系列という．また，自己共分散の列 $\{\gamma_j\}$ は，$d < 1/4$ のとき 2 乗総和可能なので，この場合を定常，**弱長記憶系列**といい，$1/4 < d < 1/2$ の場合を定常，**強長記憶系列**という．

スペクトラム: $|d| < 1/2$ の場合には，$\{y_t\}$ のスペクトラムが定義され，

$$\begin{aligned}
f_y(\omega) &= \frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{|\theta(e^{i\omega})|^2}{|1-e^{i\omega}|^2 \quad |\phi(e^{i\omega})|^2} \\
&= O(\omega^{-2d}) \qquad (\omega \to 0)
\end{aligned} \tag{4}$$

となる．したがって，persistent ($0 < d < 1/2$) な系列は原点におけるスペクトラムが発散する．スペクトラムは，$|d| < 1/2$ で積分可能である．しかし，スペクトラムが 2 乗可積分となるのは，$d < 1/4$ の場合（定常，弱長記憶）である．定常長記憶な場合においては，$d = 1/4$ を境にして異なる性質が見出されることが多い．

非定常な場合: $d \ge 1/2$ のときには，(2) のように無限の項の展開をしても，その係数列は 2 乗総和可能でないので，有限項で切断する必要がある．そこで，この場合のデータ生成過程を

$$y_t = (1-L)^{-d}u_t = \frac{1}{\Gamma(d)}\sum_{j=0}^{t-1}\frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)}u_{t-j} \qquad (d \ge 1/2) \tag{5}$$

であるものとする．このとき，

$$y_T = \begin{cases} O_p\left(\sqrt{\log T}\right) & (d = 1/2), \quad (6) \\ O_p\left(T^{d-1/2}\right) & (d > 1/2). \quad (7) \end{cases}$$

となり，定常と非定常の境界である $d = 1/2$ の場合は，$d > 1/2$ の場合と非定常性の程度が異なる．

平均回帰性: 次のような階差表現

$$\begin{aligned} (1-L)y_t &= (1-L)^{1-d}\phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t = \alpha(L)\varepsilon_t \\ &= \left(1 + \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \cdots\right)\varepsilon_t \end{aligned}$$

において，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ は impulse responses と呼ばれ，和 $1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$ が 0 のとき，$\{y_t\}$ は 平均回帰的（**mean reverting**）という．平均回帰性は d の値により次のように区別される (Cheung and Lai, 1993)．

$$\{y_t\} = \begin{cases} \text{mean reverting} & (-1/2 < d < 1), \\ \text{mean non-reverting} & (d \geq 1). \end{cases}$$

次の表は，ARFIMA(p, d, q) モデルを d の値で分類したものである．

表 1　ARFIMA(p, d, q) モデルの d による分類

定常性	$d < 1/2$	定常長記憶性	$0 < \|d\| < 1/2$
反転可能性	$d > -1/2$	persistent な定常長記憶性	$0 < d < 1/2$
自己共分散の L^1 収束性	$d \leq 0$	定常，弱長記憶性	$d < 1/4$
自己共分散の L^2 収束性	$d < 1/4$	定常，強長記憶性	$1/4 < d < 1/2$
スペクトラムの可積分性	$d < 1/2$	非定常性	$d \geq 1/2$
スペクトラムの2 乗可積分性	$d < 1/4$	平均回帰性	$d < 1$

2　極 限 定 理

時系列 $\{y_t\}$ が，ARFIMA(p, d, q) モデル

$$y_t = (1-L)^{-d}\phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t = (1-L)^{-d}\psi(L)\varepsilon_t \quad (8)$$

に従うものとする．ここで，$\psi(L) = \phi^{-1}(L)\theta(L)$, $\varepsilon_t \sim$ i.i.d.$(0, \sigma^2)$ であり，4 次までのモーメントをもつとする．

(i) $|d| < 1/2$ のとき

(8) の定常，反転可能な ARFIMA(p, d, q) モデルに従う時系列 $\{y_t\}$ に対して，関数空間 $D[0, 1]$ 上の部分和過程を次のように定義する．

$$X_T(t) = \frac{1}{\sigma T^{d+1/2}} \sum_{i=1}^{j-1} y_i \,, \qquad \left(\frac{j-1}{T} \le t < \frac{j}{T} \right) . \tag{9}$$

このとき，次の汎関数中心極限定理（**FCLT**) が成立する (Davydov 1970, Taqqu 1975)．

$$\mathcal{L}(X_T) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\psi(1) w_d^{(I)}\right) \tag{10}$$

ただし，$w_d^{(I)}$ は，[0,1] 上で定義された **Type I フラクショナル・ブラウン運動（FBM）**

$$w_d^{(I)}(t) = \frac{1}{\Gamma(d+1)} \left[\int_{-\infty}^{0} \{(t-s)^d - (-s)^d\} \, dw(s) + \int_0^t (t-s)^d \, dw(s) \right] \tag{11}$$

である．ここで，$\{w(t)\}$ は**標準ブラウン運動** (BM) である．なお，Type I FBM という命名は，以下で出てくる Type II FBM と区別するためであり，Marinucci and Robinson (1998) による．

(ii) $d = 1/2$ のとき

非定常 ARFIMA$(p, 1/2, q)$ モデルに従う時系列 $\{y_j\}$ に対して，その分散を $s_j^2 = Var(y_j)$ とおき，$D[0, 1]$ 上の確率過程

$$Y_T(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{\log T}} \, y_{j-1} \,, \qquad \left(\frac{s_{j-1}^2}{s_T^2} \le t < \frac{s_j^2}{s_T^2} \right) . \tag{12}$$

を定義する．このとき，次の FCLT が成立する (Tanaka 1999)．

$$\mathcal{L}(Y_T) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\psi(1)}{\sqrt{\pi}} w \right) \tag{13}$$

ただし，$\{w\} = \{w(t)\}$ は，標準 BM である．

(iii) $d > 1/2$ のとき

非定常 ARFIMA(p, d, q) モデルに従う時系列 $\{y_j\}$ に対して，$D[0, 1]$ 上の確率過程を次のように定義する．

$$Z_T(t) = \frac{1}{\sigma T^{d-1/2}} \, y_{j-1} \,, \qquad \left(\frac{j-1}{T} \le t < \frac{j}{T} \right) . \tag{14}$$

このとき，次の FCLT が成立する (Chan and Wei 1988, Liu 1998, Tanaka 1999)．

$$\mathcal{L}(Z_T) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\psi(1) w_{d-1}^{(II)}\right) \tag{15}$$

ただし，$\{w_g^{(II)}\} = \{w_g^{(II)}(t)\}$ は，[0,1] 上で定義された **Type II FBM**

$$w_g^{(II)}(t) = \frac{1}{\Gamma(g+1)} \int_0^t (t-s)^g \, dw(s) \tag{16}$$

である．なお，g が自然数の場合，Type II の FBM は **g-fold integrated BM**

$$w_g^{(II)}(t) = \int_0^t w_{g-1}^{(II)}(s)\, ds\,, \quad (g = 1, 2, \cdots)\,, \qquad w_0^{(II)}(t) = w(t)$$

と一致する (Tanaka 1996)．

3 統計量の極限分布

本節でも，時系列 $\{y_t\}$ が，ARFIMA(p, d, q) モデル

$$y_t = (1-L)^{-d}\phi^{-1}(L)\theta(L)\varepsilon_t = (1-L)^{-d}\psi(L)\varepsilon_t \tag{17}$$

に従うものとする．ここで，$\psi(L) = \phi^{-1}(L)\theta(L)$, $\varepsilon_t \sim$ i.i.d.$(0, \sigma^2)$ であり，4 次までのモーメントをもつとする．

標本平均

(i) $|d| < 1/2$ **のとき** (Hosking 1996)

$$T^{1/2-d}\,\bar{y} \longrightarrow \mathrm{N}(0, \sigma^2\psi^2(1)\omega^2) \tag{18}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\omega^2 &= Var(w_d^{(I)}(1)) \\
&= \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\left[\int_{-\infty}^0 \{((1-s)^d - (-s)^d)^2\}\, ds + \int_0^1 (1-s)^{2d}\, ds\right] \\
&= \frac{\Gamma(1-2d)}{(2d+1)\Gamma(1-d)\Gamma(1+d)}
\end{aligned}$$

(ii) $d \geq 1/2$ **のとき** (Tanaka 1999)

$$T^{1/2-d}\,\bar{y} \longrightarrow \mathrm{N}(0, \sigma^2\psi^2(1)\kappa^2) \tag{19}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
\kappa^2 &= Var(w_d^{(II)}(1)) = \frac{1}{\Gamma^2(d+1)}\int_0^1 (1-s)^{2d}\, ds \\
&= \frac{1}{(2d+1)\Gamma^2(d+1)}
\end{aligned}$$

2 次モーメント

(i) $-1/2 < d < 1/4$ **のとき** (Hannan 1976)

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^T \left(y_t^2 - Var(y_t)\right) \longrightarrow \text{Normal}$$

(ii) $d = 1/4$ **のとき** (Hosking 1996)

$$\frac{1}{\sqrt{T\log T}}\sum_{t=1}^T \left(y_t^2 - Var(y_t)\right) \longrightarrow \text{Normal}$$

(iii) $1/4 < d < 1/2$ **のとき** (Rosenblatt 1961)

$$\frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^T \left(y_t^2 - Var(y_t)\right) \longrightarrow \textbf{Rosenblatt distribution}$$

(iv) $1/2 < d$ **のとき** (Chan and Wei 1988, Liu 1998, Tanaka 1999)

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{T^{2d}}\sum_{t=1}^{T} y_t^2\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\sigma^2\psi^2(1)\int_0^1 \left(w_{d-1}^{(II)}(t)\right)^2 dt\right)$$

最尤推定量 (Fox and Taqqu 1986, Li and McLeod 1986, Dahlhaus 1989, Yajima 1989, Tanaka 1999)

誤差項の正規性のもとで，$d > -1/2$ なる任意の実数 d に対して，その **MLE** (あるいは，擬似 MLE) を $\hat{d}$ とするとき，次の結果が成り立つ．

$$\sqrt{T}(\hat{d} - d) \longrightarrow \mathrm{N}(0, \omega^{-2})$$

ここで，

$$\omega^2 = \pi^2/6 - \delta'\Omega^{-1}\delta, \qquad \delta = (\kappa_1, \cdots, \kappa_p, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)'$$

$$\kappa_i = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{j} a_{j-i}, \qquad \lambda_i = -\sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{j} b_{j-i},$$

であり，a_j と b_j は，それぞれ，$\phi^{-1}(L)$ と $\theta^{-1}(L)$ の展開表現における L^j の係数，また，Ω はパラメータ ϕ と θ に対する**フィッシャー情報行列**である．

検定統計量 (Robinson 1994, Tanaka 1999)

検定問題

$$H_0 : d = d_0 \quad H_1 : d < d_0$$

に対する検定統計量として，

$$S_T = \sqrt{T}\sum_{j=1}^{T-1} \frac{1}{j}\hat{\rho}_j \Big/ \hat{\omega}$$

を考える．ただし，$\hat{\rho}$ は H_0 のもとで計算された残差に基づく自己相関，$\hat{\omega}$ は d の最尤推定量の標準誤差の推定量である．S_T が小さいときに H_0 を棄却する検定は，誤差項が正規ならば，適当な変換群のもとで **LBI** となる．また，局所対立仮説 $H_1 : d = d_0 + c/\sqrt{T}$ (c は固定された負の実定数）のもとで，

$$S_T \longrightarrow \mathrm{N}(c\omega, 1)$$

を得るので，**漸近的局所検出力**は，N(0,1) の分布関数 $\Phi(\cdot)$ を使って

$$\lim_{T\to\infty} P(S_T < -z_\alpha | d = d_0 + c/\sqrt{T}) = \Phi\left(-z_\alpha - c\omega\right)$$

と表すことができる．

共和分係数の推定量 (Chung 1999)

回帰（**フラクショナル共和分**）モデル

$$z_t = \alpha + \beta y_t + v_t\,, \qquad (t = 1, \cdots, T)$$

を考える．ここで，$\{y_t\}$ は (17) で定義された ARFIMA(p,d,q) に従い，$\{v_t\}$ は ARFIMA(r,d_v,s) に従うものとする．ただし，$0 < d_v < d < 1/2$ とする．ここで，$d + d_v > 1/2$ のときは，

$$\frac{1}{T^{d+d_v}} \sum_{t=1}^{T} y_t v_t \longrightarrow \textbf{multivariate Rosenblatt distribution} .$$

α と β の LSE を $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ として，説明変数 $\{y_t\}$ と誤差項 $\{v_t\}$ が互いに独立のとき，次の結果が成り立つ（相関をもつと inconsistent）．

(i) $d + d_v < 1/2$ **のとき**

$$\sqrt{T}(\hat{\alpha} - \alpha) \longrightarrow \mathrm{Normal}, \qquad \sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \longrightarrow \mathrm{Normal} .$$

(ii) $d + d_v > 1/2$ **のとき**

$$T^{1/2-d_v}(\hat{\alpha} - \alpha) \longrightarrow \mathrm{Normal}, \qquad T^{1-d-d_v}(\hat{\beta} - \beta) \longrightarrow \textbf{non} - \textbf{Normal} .$$

t 統計量や F 統計量は発散する．

Note. 通常の共和分モデル

$$z_t = \alpha + \beta x_t + \eta_t , \qquad x_t = x_{t-1} + \xi_t$$

ただし，$\{\eta_t\}$ と $\{\xi_t\}$ は，ともに定常 ARMA の場合，説明変数 $\{x_t\}$ と誤差項 $\{\eta_t\}$ が相関を持っても，$\hat{\alpha} = \alpha + O_p(1/\sqrt{T}), \hat{\beta} = \beta + O_p(1/T)$ であり，t 統計量や F 統計量は $O_p(1)$ である．

参 考 文 献

Adenstedt, R.K. (1974) On large-sample estimation for the mean of a stationary random sequence. *Annals of Statistics* **2**, 1095-1107.

Beran, J. (1994) *Statistics for Long-Memory Processes.* New York: Chapman & Hall.

Box, G.E.P. & G.M. Jenkins (1970) *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* San Francisco: Holden-Day.

Brown, B.M. (1971) Martingale central limit theorems. *Annals of Mathematical Statistics* **42**, 59-66.

Chan, N.H. & C.Z. Wei (1988) Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes. *Annals of Statistics* **16**, 367-401.

Cheung, Y-W. & K.S. Lai (1993) A fractional cointegration analysis of purchasing power parity. *Journal of Business and Economic Statistics* **11**, 103-112.

Chung, C-F. (1999) Sample means, sample covariances, and linear regression of stationary multivariate long memory processes. *Preprint.*

Dahlhaus, R. (1989) Efficient parameter estimation for self-similar processes. *Annals of Statistics* **17**, 1749-1766.

Davydov, Y.A. (1970) The invariance principle for stationary processes. *Theory of Probability and Its Applications* **15**, 487-498.

Fox, R. & M.S. Taqqu (1986) Large-sample properties of parameter estimates for strongly dependent stationary Gaussian time series. *Annals of Statistics* **14**, 517-532.

Granger, C.W.J. & R. Joyeux (1980) An introduction to long-memory models and fractional differencing. *Journal of Time Series Analysis* **1**, 15-29.

Hannan, E.J. (1976) The asymptotic distribution of serial covariances. *Annals of Statistics* **4**, 396-399.

Hosking, J.R.M. (1981) Fractional differencing. *Biometrika* **68**, 165-176.

Hosking, J.R.M. (1996) Asymptotic distributions of the sample mean, autocovariances, and autocorrelations of long-memory time series. *Journal of Econometrics* **73**, 261-284.

Li, W.K. & A.I. McLeod (1986) Fractional time series modelling. *Biometrika* **73**, 217-221.

Liu, M. (1998) Asymptotics of nonstationary fractional integrated series. *Econometric Theory* **14**, 641-662.

Mandelbrot, B.B. & J.W. Van Ness (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* **10**, 422-437.

Marinucci, D. & P. Robinson (1998) Alternative forms of fractional Brownian motion. *Preprint.*

Phillips, P.C.B. & V. Solo (1992) Asymptotics for linear processes. *Annals of Statistics* **20**, 971-1001.

Robinson, P.M. (1994) Efficient tests of nonstationary hypotheses. *Journal of the American Statistical Association* **89**, 1420-1437.

Rosenblatt, M. (1961) Independence and dependence. In *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 2* (University of California Press, Berkeley) 431-443.

Sowell, F. (1990) The fractional unit root distribution. *Econometrica* **58**, 495-505.

Tanaka, K. (1996) *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory.* New York: Wiley.

Tanaka, K. (1999) The nonstationary fractional unit root. *Econometric Theory* **15**, 549-582.

Taqqu, M.S. (1975) Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* **31**, 287-302.

Yajima, Y. (1989) Long-memory models and their statistical properties (in Japanese). *Journal of the Japan Statistical Society* **19**, 219-246.