非定常および反転不可能な時系列モデルの統計理論

一橋大・経　田中 勝人

１．非正則な統計量

２．非正則な分布への３つの接近法

３．自己回帰係数推定量の分布の近似

４．反転不可能な移動平均モデル

５．共和分モデルの係数推定量の漸近分布

６．高次和分過程の統計量

１．非正則な統計量

次の状態空間モデル

$$y_t = \beta_t + \varepsilon_t\ , \qquad \beta_t = \beta_{t-1} + u_t\ , \qquad \beta_0 = 0\ , \qquad (t = 1, \cdots, T)$$

において，

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ u_t \end{pmatrix} \quad \sim \quad \mathrm{NID}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma_\varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix}\right)$$

を仮定する．

検定問題：

$$H_0 : \rho = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_\varepsilon^2} = \rho_0 \qquad \text{vs} \qquad H_1 : \rho > \rho_0$$

検定統計量：

$S_T =$ 対数尤度 $L(\rho, \sigma_\varepsilon^2)$ の ρ に関する偏導関数を H_0 のもとで評価

$\sigma_\varepsilon^2 = 1$（既知）の場合，

$$\begin{aligned} S_T &= \left.\frac{dL(\rho)}{d\rho}\right|_{H_0} = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{\lambda_{t,T}}{1+\rho_0\lambda_{t,T}}\left(Z_t^2 - 1\right) \\ &= \begin{cases} O_p(\sqrt{T}) & \rho_0 > 0\,, \\ O_p(T^2) & \rho_0 = 0\,. \end{cases} \end{aligned}$$

ここで，

$$\lambda_{t,T} = \frac{1}{4}\sin^{-2}\frac{t-\frac{1}{2}}{2T+1}\,\pi$$

$\rho_0 = 0$ のとき，

$$\frac{2}{T^2}\frac{dL(\rho)}{d\rho} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}Z_n^2 \quad - \quad \frac{1}{2}\,.$$

２．非正則な分布への３つの接近法

ランダム・ウォーク・モデル

$$y_j = y_{j-1} + \varepsilon_j = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j \ , \qquad \{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0,1) \ ,$$

からの標本 2 次モーメントの漸近分布を考える．

$$\frac{1}{T^2}\sum_{j=1}^{T} y_j^2 \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^1 w^2(t)\ dt \ ,$$

$$\frac{1}{T^2}\sum_{j=1}^{T} \lambda_{j,T} Z_j^2 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-\frac{1}{2})^2\pi^2}\, Z_n^2 \ ,$$

$$\frac{1}{T^2}\sum_{j=1}^{T}\sum_{k=1}^{T} B_T(j,k)\,\varepsilon_j\varepsilon_k \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^1\int_0^1 [1-\max(s,t)]\ dw(s)\ dw(t) \ .$$

$\{w(t)\}$ は [0, 1] 上で定義された標準ブラウン運動である．同様にして，

$$\frac{1}{T^2}\sum_{j=1}^{T} (y_j - \bar{y})^2 \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^1 \left(w(t) - \int_0^1 w(s)\ ds\right)^2\ dt \ ,$$

$$= \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2}\, Z_n^2 \ ,$$

$$= \qquad \int_0^1\int_0^1 [\min(s,t) - st]\ dw(s)\ dw(t) \ .$$

極限分布の計算

特性関数 $\phi(\theta) = \left(\cos\sqrt{2i\theta}\right)^{-1/2}$ あるいは，$\left(\sin\sqrt{2i\theta}/\sqrt{2i\theta}\right)^{-1/2}$ を反転する．すなわち，

$$F(x) = P(S \le x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{Re}\left[\frac{1-e^{-i\theta x}}{i\theta}\phi(\theta)\right]\ d\theta \ .$$

表 1　非正則な分布への３つの接近法

	Stochastic Process Approach	Eigenvalue Approach	Fredholm Approach
分布の表現	$\int_0^1 w^2(t)dt$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_n^2}{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}$	$\int_0^1 \int_0^1 (1-\max(s,t))\, dw(s)dw(t)$
使用する定理など	部分和過程 汎関数 CLT 連続写像の定理	行列の固有値 直交変換	Mercer の定理 CLT
特性関数の導出	Girsanov の定理 (数式処理)	χ^2 分布の加重和	Fredholm 行列式 レゾルベント (数式処理)
特徴	測度論的	線形代数的	解析的

３．自己回帰係数推定量の分布の近似

定常な AR(1) モデル

$$y_j = \rho y_{j-1} + \varepsilon_j \ , \qquad |\rho| < 1 \ , \qquad \{\varepsilon_j\} \sim \text{i.i.d.}(0,1) \ ,$$

における ρ の LSE

$$\hat{\rho} = \sum_{j=1}^{T} y_{j-1} y_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{T} y_{j-1}^2$$

の分布は，$\rho = 1 \ - \ (c/T)$ のもとで，c を固定して $T \to \infty$ とすると，

$$T(\hat{\rho} \ - \ \rho) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\int_0^1 Y(t) \ dw(t)}{\int_0^1 Y^2(t) \ dt}$$

となる．ここで，$\{Y(t)\}$ は Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$dY(t) = -cY(t) \ dt + dw(t) \ , \qquad Y(0) \ \sim \ \mathrm{N}\left(0, \frac{1}{2c}\right)$$

である．そして，

$$\lim_{T \to \infty} P\left(T(\hat{\rho} - \rho) \le x\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{\theta} \mathrm{Im}[\phi(\theta; c, x)] \ d\theta$$

により，極限分布が計算される．ここで，

$$\begin{aligned} \phi(\theta; c, x) &= \exp\left(\frac{c + i\theta}{2}\right) \left[\cos\mu + \frac{2c^2 + \theta^2 - 2i\theta(x - c)}{2c} \ \frac{\sin\mu}{\mu}\right]^{-1/2} \ , \\ \mu &= \sqrt{2i\theta(x - c) - c^2} \ . \end{aligned}$$

である．

４．反転不可能な移動平均モデル

MA(1) モデル

$$y_j = \varepsilon_j - \alpha\varepsilon_{j-1}\ , \qquad \varepsilon_1\ ,\ \varepsilon_2\,,\cdots,\sim \mathrm{NID}(0,\sigma^2)\ , \qquad (j=1,\cdots,T)$$

において，初期値 ε_0 に関して次の 2 通りを考える．

Case 1: $\quad \varepsilon_0 = 0$

Case 2: $\quad \varepsilon_0\ ,\ \varepsilon_1\,,\cdots, \quad \sim \quad \mathrm{NID}(0,\sigma^2)$

検定問題：

$$H_0 : \alpha = 1 \qquad \mathrm{vs} \qquad H_1 : \alpha < 1$$

局所対立仮説 $H_1 : \alpha = 1\ -\ (c/T)$ のもとでの極限分布：

Case 1:
LBI 統計量

$$\Rightarrow \qquad \frac{c^2+3c+3}{3}\,\chi^2(1)$$

包絡線

$$\Rightarrow \qquad \int_0^1\int_0^1 \Big[c + c^2 - c^2\max(s,t)\Big]\ dw(s)\ dw(t)\ -\ c$$

Case 2:
LBIU 統計量

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{c^2}{n^4\pi^4}\right]\ Z_n^2$$

包絡線

$$\Rightarrow \qquad c^2\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\pi^2}\ Z_n^2\ -\ c$$

５．共和分モデルの係数推定量の漸近分布

共和分モデル

$$y_j = \alpha + \beta x_j + v_j \ , \qquad x_j = x_{j-1} + u_j \ , \qquad (j = 1, \cdots, T)$$

において，

$$\begin{pmatrix} u_j \\ v_j \end{pmatrix} \qquad \sim \qquad \mathrm{NID}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma_u^2 & \sigma_{uv} \\ \sigma_{uv} & \sigma_v^2 \end{pmatrix}\right)$$

を仮定する．

回帰係数 β の推定量の漸近分布

OLS:

$$T(\hat{\beta}_{OLS} - \beta) \qquad \Rightarrow \qquad V^{-1}(U_1 + U_2 + \sigma_{uv})$$

2SLS，IV:

$$T(\hat{\beta}_{2SLS} - \beta) \ , \ T(\hat{\beta}_{IV} - \beta) \qquad \Rightarrow \qquad V^{-1}(U_1 + U_2)$$

ML:

$$T(\hat{\beta}_{ML} - \beta) \qquad \Rightarrow \qquad V^{-1} U_2$$

ここで，

$$\begin{aligned} U_1 &= \sigma_{uv} \int_0^1 \tilde{w}_1(t) \ dw_1(t) \ , \\ U_2 &= \sqrt{\sigma_u^2 \ \sigma_v^2 - \sigma_{uv}^2} \int_0^1 \tilde{w}_1(t) \ dw_2(t) \ , \\ V &= \sigma_u^2 \int_0^1 \tilde{w}_1^2(t) \ dt \ , \\ \tilde{w}_1(t) &= w_1(t) \ - \int_0^1 w_1(s) \ ds \ . \end{aligned}$$

６．高次和分過程の統計量

I(d) 過程

$$(1-L)^d y_j = \varepsilon_j \ , \qquad \{\varepsilon_j\} \sim \mathrm{i.i.d.}(0,1) \ , \qquad (j=1,\cdots,T)$$

において，和分の次数 d は 1/2 以上の任意の実数であるとして，統計量

$$S_T = \frac{T}{2}\, y_T^2 \Big/ \sum_{j=2}^{T} y_{j-1}^2$$

を考える．このとき，

$$S_T \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\chi^2(1) & (d=1/2)\ , \\[2ex] \dfrac{1}{2}\, F_{d-1}^2(1) \Big/ \displaystyle\int_0^1 F_{d-1}^2(t)\ dt & (d>1/2)\ , \end{cases}$$

を得る．ここで，$\{F_g(t)\}$ は，フラクショナルなブラウン運動であり，

$$F_g(t) = \frac{1}{\Gamma(g+1)} \int_0^t (t-s)^g\ dw(s)\ , \qquad g > -\frac{1}{2}$$

で定義される．