

# ウェーブレット解析

一橋大学大学院経済学研究科 田中 勝人

## 1. はじめに

ウェーブレット解析は、1980年代初頭にフランスの石油探査技師モルレー (J. Morlet) によって開発された手法とされている (榊原 (1995))。彼は、油床の場所を探りあてるために地中に振動を与え、人工的に作り出された地震波を解析する際にウェーブレットの手法を使った。地中からの反射信号は、地層の影響や異質物の存在のために多くの不規則、かつ局所的なノイズを含むことになる。その信号を表現するのに、フーリエ変換のように周期的な三角関数を単に重ね合わせるのではなく、ウェーブレットの方法を使ったのである。このように、ウェーブレット解析は、きわめて実用的な理由から生まれた手法である。

ウェーブレット解析の特徴は、端的にいうならば、ウェーブレット変換により、信号 (データ) を時間と周波数という 2 つの観点から同時に、かつ局所的にとらえようとする点にある。いわば、森という全体を見ると同時に、木も見られる方法ということができる。数値計算上、ウェーブレット変換が簡単に実行可能であることも、ウェーブレット解析の利点となっている。

現在では、ウェーブレットの方法は、工学をはじめとして、情報科学、数学、物理学、統計学、地震学、医学、経済学などさまざまな分野に応用されている。例えば、JPEG-2000 と呼ばれる画像圧縮技術に応用され、従来の方法よりも美しい画質を実現している。その理由は、画像の平坦な部分と輪郭のように急激に変化する部分では、後者の方がきめ細かい処理をする必要があるが、ウェーブレット変換は、まさにその条件に適合した小回りのきくものとなっているからである。

本稿では、統計学への応用の観点からウェーブレット解析を説明したい。統計学以外の応用については、上述のように、きわめて多岐にわたっているが、それらの例については、多くの応用例をインターネットで検索することが可能なので、興味ある読者は試みていただきたい。

しかし、統計学の分野への応用に限っても、それらを包括的に述べることは紙幅の関係で不可能である。そこで、ここでは、経済時系列のように非定常的あるいは長期記憶的な時系列への応用を念頭におきながら、ウェーブレット解析の紹介を試みたい。ウェーブレット解析は連続時間を出発点としている。それに対して、経済時系列は、離散時間で定義されるのが普通である。したがって、本稿では、連続時間の場合について簡単にふれたあと、離散時間のウェーブレット解析に主眼をおいて解説したい。

## 2. ウェーブレットとは何か

ウェーブレット (wavelet) の辞書的意味は「さざなみ」である。ウェーブ (wave) が大局的、規則的な普通の波であるのに対して、一時的に発生しては消滅するような局在的な波を表す言葉である。

一般に、分析の対象となる信号は、上述の人工地震波のように、大局的には規則性も周期性もないものが多い。むしろ、時間とともに周波数が増減しているのが普通である。ウェーブレット解析は、そのような不規則な信号から、後述するウェーブレット関数を上手に使うことで、時間と周波数の両面から信号を分解して分析する手法である。

ウェーブレット解析の1つの解釈として、オーケストラが奏でる音楽と楽譜の関係を想起することができる。音楽は、さまざまな周波数や振幅をもつ音を時系列的に合成したものであるが、音楽を楽譜で表現する作業がウェーブレット解析である、ということができる。すなわち、作曲家はウェーブレット解析者である。もっとも、この場合、実際の音楽 (= 信号) は、楽譜 (= ウェーブレット解析) から生まれるから、オーケストラの演奏は、いわば逆ウェーブレット解析 (= ウェーブレット合成) である。

ウェーブレット関数は、三角関数や指数関数のような特定の関数ではない。ウェーブレット関数  $\psi(t)$  とは、

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(t) dt = 1$$

をみたす関数の総称であり、マザー・ウェーブレットと呼ばれる。第1の条件から、 $\psi(t)$  は振動的で、台 (関数が0とならない区間の閉包) が有界となるようなものであることが想起される。そして、第2の条件は、その変動が有

限で 1 に標準化されていることを意味している。マザー・ウェーブレットは、これら 2 つの条件をみたす限り任意のものでよい。

最も簡単な例として、次に定義されるハール (Haar) 関数  $\psi_H(x)$  がある。

$$(2) \quad \psi_H(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1/2) \\ -1 & (1/2 \leq x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外するとき}) \end{cases}$$

ハール関数は単純で使いやすい反面、台が狭く不連続なため、そのフーリエ変換はゆるやかに 0 に収束するので、あまり望ましくない。他方、台がコンパクトでないものは、フーリエ変換の性質がよいものの、実用的でない。

よく使われるマザー・ウェーブレットは、コンパクトな台をもつ連続関数であり、ウェーブレットの数学理論を築いたドーブシー (I. Daubechies (1992)) により多くのものが求められている。ただし、離散時間で定義されるデータに対しては、ウェーブレットに関しても別の議論が必要であり、第 4 節以降で説明する。

### 3. CWT : 連続ウェーブレット変換

本節では、信号  $\{x(t)\}$  は連続時間で観測され、2 乗可積分、すなわち、

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt < \infty$$

であると仮定する。このような  $x(t)$  のウェーブレット解析を行うためには、まず、マザー・ウェーブレット  $\psi(t)$  を指定しなければならない。

マザー・ウェーブレット  $\psi(t)$  が与えられたとき、次の積分

$$(3) \quad C_{a,b}(\psi, x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_{a,b}(t) x(t) dt$$

を信号  $x(t)$  の CWT (連続ウェーブレット変換) という。ここで、

$$(4) \quad \tilde{\psi}_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (0 < a, -\infty < b < \infty)$$

である。関数  $\tilde{\psi}_{a,b}(t)$  は、 $\psi(t)$  を横軸方向に  $b$  だけシフトして  $a$  倍だけ拡大したものである。ただし、 $\sqrt{a}$  で割っているので、 $\tilde{\psi}_{a,b}(t)$  の変動は 1 であり、依然として (1) のウェーブレットの性質をもっている。 $a$  は、波長の拡大・縮小

を制御するスケール・パラメータ,  $b$  は時間を調整するシフト・パラメータである。

(3) 式の積分は, フーリエ変換

$$\hat{x}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i \lambda t} dt$$

と同様の演算であるが, フーリエ変換のパラメータは  $\lambda$  だけであるのに対して, ウェーブレット変換は 2 つのパラメータ  $a$  と  $b$  をもつ点で異なる。

工学的な観点からは, (3) の積分は,  $x$  を  $\tilde{\psi}_{a,b}$  によってフィルタリング演算したものと解釈できる。そして, フィルタリングの結果として,  $\psi(t)$  が原点まわりで局在しているウェーブレットであれば, 信号  $x(t)$  の時点  $b$ , 周波数レベル  $1/a$  における成分が抽出される。ここで, 座標  $(b, 1/a)$  により作られる平面を信号平面という。換言すれば, ウェーブレット変換は, 信号を時間と周波数を座標とする信号平面上にプロットしたものである, ということができる。例えば,  $x(t) = \tilde{\psi}_{a,b}(t)$  ならば,  $C_{a,b}(\psi, x) = 1$  である。他方,  $x(t)$  が一定ならば,  $C_{a,b}(\psi, x) = 0$  であり, 周波数レベル  $1/a$  の成分を含まない。

CWT から, 元の信号を復元することも可能である。それは, ICWT (逆連続ウェーブレット変換) と呼ばれ, 重積分を使った反転公式

$$(5) \quad x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{\infty} C_{a,b}(\psi, x) \tilde{\psi}_{a,b}(t) db \right] \frac{da}{a^2}$$

から求めることができる。ここで,

$$(6) \quad C_\psi = \int_0^\infty |\hat{\psi}(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \hat{\psi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-2\pi i \lambda t} dt$$

であり,  $C_\psi < \infty$  ならば (5) の重積分の存在が保証される。

ところで, CWT は任意の  $(b, 1/a)$  に対して定義されるが, CWT のすべての値を信号平面上にプロットすることは効率の観点から問題があるし, 多くの場合, 実際上不可能である。また, 時間と周波数に関する情報を同時に細分化することはできない, という一種の不確定性原理から, 信号には最小単位があり, 信号平面上に面積 2 の領域を占めることが知られている (榊原 (1995))。したがって, (3) の CWT は離散化して考えれば十分である。

通常は, 離散化されたウェーブレット変換として,

$$(7) \quad d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) x(t) dt \quad (j, k \in \mathcal{Z}; \mathcal{Z} \text{ は整数の集合})$$

を考える。ただし、

$$(8) \quad \psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) \quad (j, k \in \mathcal{Z})$$

である。(7) は、信号平面上の座標  $(b = 2^j k, 1/a = 2^{-j})$  に対応する値であり、この離散化により、信号平面はセルに分割される。

同様にして、(5) に対応して離散化された逆ウェーブレット変換を考えることができる。信号  $x(t)$  およびマザー・ウェーブレット  $\psi(t)$  に関する追加的な条件のもとで、それは、

$$(9) \quad x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} 2^{-j/2} \psi(2^{-j}t - k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

によって与えられる。これは、 $x(t)$  のウェーブレット展開であり、2重の和で表される点でフーリエ展開とは異なっている。

#### 4. DWT：離散ウェーブレット変換

前節では、連続的に観測される信号のウェーブレット解析について述べたが、以下では、経済時系列などのように離散的に観測されるデータのウェーブレット解析について説明する。

時系列  $\{X_t\}$  が時点  $t = 0, \dots, T-1$  において観測されるものとして、これを列ベクトル  $\mathbf{X} = (X_0, X_1, \dots, X_{T-1})'$  で表す。ここで、標本サイズ  $T$  は  $T = 2^J$  ( $J$  は自然数) であると仮定する。

このとき、 $\mathbf{X}$  の DWT (離散ウェーブレット変換) とは、次の変換

$$(10) \quad \mathbf{W} = \mathcal{W} \mathbf{X} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_J \\ \mathbf{V}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

で、以下で述べる条件をみたすものをいう。

$\mathcal{W}$  は直交行列で、**ウェーブレット変換行列**と呼ばれる。また、 $\mathcal{W}_j$  ( $j = 1, \dots, J$ ) は、 $T/2^j$  個の行からなる行列である。 $\mathcal{W}_J$  は行ベクトルであり、 $T-1$  行に位置する。最後の  $\mathcal{V}_J$  も行ベクトルであり、すべての要素は  $1/\sqrt{T}$  からなっている。

他方，変換後の  $\mathbf{W}$  は，ウェーブレット係数ベクトルと呼ばれ，各  $\mathbf{W}_j$  は， $T/2^j$  個の要素からなる第  $j$  レベルのウェーブレット係数である．ただし，最後の  $\mathbf{V}_J$  はスカラーで，第  $J$  レベルのスケール係数と呼ばれる． $\nu_J$  の定義から， $\mathbf{V}_J = \nu_J \mathbf{X} = \sqrt{T} \bar{X}$  ( $\bar{X}$  は  $\mathbf{X}$  の平均) となる． $\mathcal{W}$  および  $\mathbf{W}$  の行数は，当然ながら，いずれも，

$$T/2 + T/2^2 + \cdots + T/2^{J-1} + T/2^J + T/2^J = T$$

個である．

あとで説明するように，ウェーブレット係数  $\mathbf{W}_j$  は， $j$  が大きくなるにつれて，低周波数成分を検出しようとする働きがある．また，解像度の観点からは， $j$  が大きくなるにつれて，解像度は落ちて行く．これは，(8) 式の表現と対応しており，Daubechies (1992) の流儀に従うものである．ただし，書物によっては，(8) 式の  $-j$  を  $j$  にした表現も使われている．その場合は， $j$  が大きくなるにつれて解像度が高くなるので，注意されたい (加藤-柴田 (2001))．

ウェーブレット変換は，(10) の分割表現に従って段階的に実行される．まず，最初の  $T/2$  行からなる  $\mathcal{W}_1$ ，および第 1 レベルのウェーブレット係数  $\mathbf{W}_1$  を求めよう．そのために，次の性質をもつ数列  $\{h_l\}$  を導入する．

$$h_l \neq 0 \quad (l = 0, m-1), \quad h_l = 0 \quad (l < 0, l > m-1)$$

この数列は，値が 0 でない最小項  $l = 0$  から最大項  $l = m-1$  までに  $m$  個の項がある．以下では，このような数列を幅  $m$  のフィルターと呼ぶ．今，幅  $m$  のフィルター  $\{h_l\}$  が次の条件をみたすものとする．

$$(11) \quad \sum_{l=0}^{m-1} h_l = 0, \quad \sum_{l=0}^{m-1} h_l^2 = 1, \quad \sum_{l=0}^{m-1} h_l h_{l+2n} = 0 \quad (n : 0 \text{ 以外の整数})$$

最初の条件は， $\{h_l\}$  が振動的なフィルターであり，高周波数成分を検出する high-pass フィルターであることを意味している．2 番目は規準化条件である．これらは，連続的なマザー・ウェーブレットの条件 (1) に対応するものである．この意味で， $\{h_l\}$  はマザー・ウェーブレット・フィルター，あるいは単に，ウェーブレット・フィルターと呼ばれる．3 番目の条件は，偶数個のシフトに対して直交するもので，この制約から，フィルターの幅  $m$  は偶数となる．

幅  $m$  のウェーブレット・フィルター  $\{h_l\}$  を使って、ウェーブレット係数  $\mathbf{W}_1 = \mathcal{W}_1 \mathbf{X}$  の要素  $W_{1,t}$  ( $t = 0, 1, \dots, (T/2) - 1$ ) は

$$(12) \quad W_{1,t} = \sum_{l=0}^{m-1} h_l X_{2t+1-l \bmod T} = \sum_{l=0}^{T-1} h_{2t+1-l \bmod T} X_l$$

により計算される．ここで、 $\bmod T$  を含む計算は、 $T$  を法として行うことを意味する．例えば、

$$W_{1,0} = \sum_{l=0}^{T-1} h_{1-l \bmod T} X_l$$

においては、変換行列  $\mathcal{W}_1$  の第 1 行  $\mathcal{W}'_{1,1}$  は、

$$\mathcal{W}'_{1,1} = (h_1, h_0, 0, \dots, 0, h_{m-1}, \dots, h_2)$$

となることがわかる．以下、 $\mathcal{W}'_{1,j}$  は  $\mathcal{W}'_{1,j-1}$  の成分を 2 個ずつ右へシフトして巡回的に定義される．特に、 $m = 4$  の場合、 $\mathcal{W}_1$  は

$$\mathcal{W}_1 = \begin{pmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 \\ h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{pmatrix}$$

で定義される．

引き続き  $T/4$  個の行からなる  $\mathcal{W}_2$  の要素、および第 2 レベルのウェーブレット係数  $\mathbf{W}_2$  の求め方は次の通りである．まず、低周波数成分を検出する幅  $m$  の low-pass フィルター  $\{g_l\}$  を

$$(13) \quad g_l = (-1)^{l+1} h_{m-1-l} \quad \Leftrightarrow \quad h_l = (-1)^l g_{m-1-l}, \quad (l = 0, 1, \dots, m-1)$$

により定義する．この関係から得られるフィルターを QMF (quadrature mirror filter) という．このとき、

$$(14) \quad \sum_{l=0}^{m-1} g_l = \sqrt{2}, \quad \sum_{l=0}^{m-1} g_l^2 = 1, \quad \sum_{l=0}^{m-1} g_l g_{l+2n} = 0, \quad (n : 0 \text{ でない整数})$$

が成り立つことが示される (Percival-Walden (2000))．最初の条件が low-pass フィルターを示唆しており、2 番目と 3 番目の条件は、ウェーブレット・フィ

ルター  $\{h_l\}$  と同様に、それぞれ、規準化条件と直交条件を表す。さらに、 $\{g_l\}$  と  $\{h_l\}$  の直交性

$$(15) \quad \sum_{l=0}^{m-1} g_l h_{l+2n} = 0, \quad (n: \text{任意の整数})$$

が成り立つ。フィルター  $\{g_l\}$  は、**スケーリング・フィルター**、あるいは**ファーザー・ウェーブレット・フィルター**と呼ばれる。

幅  $m$  のスケーリング・フィルター  $\{g_l\}$  を使って、 $T/2$  個の値

$$(16) \quad V_{1,t} = \sum_{l=0}^{m-1} g_{2t+1-l \bmod T} X_l, \quad (t = 0, 1, \dots, (T/2) - 1)$$

を計算する。  $V_{1,t}$  を第 1 レベルの**スケーリング係数**といい、これら  $T/2$  個を成分とするベクトルを  $\mathbf{V}_1$  とする。(16) は、 $\mathbf{X}$  から  $\mathbf{V}_1$  への変換であり、この変換を

$$(17) \quad \mathbf{V}_1 = \mathcal{V}_1 \mathbf{X} = \mathcal{A}_1 \mathbf{X}$$

と表すことにする。この変換は、ウェーブレット変換  $\mathbf{W}_1 = \mathcal{W}_1 \mathbf{X} = \mathcal{B}_1 \mathbf{X}$  と対をなすものである。明らかに、 $\mathcal{V}_1 = \mathcal{A}_1$  は、 $\mathcal{W}_1 = \mathcal{B}_1$  において、 $h_l$  を  $g_l$  に代えただけのものである。

次に、 $\mathbf{V}_1$  に基づいて、 $T/4 \times 1$  ベクトル  $\mathbf{W}_2$  と  $\mathbf{V}_2$  の各要素  $W_{2,t}$  と  $V_{2,t}$  を、 $t = 0, 1, \dots, (T/4) - 1$  に対して、以下のように計算する。

$$(18) \quad W_{2,t} = \sum_{l=0}^{m-1} h_l V_{1,2t+1-l \bmod \frac{T}{2}}, \quad V_{2,t} = \sum_{l=0}^{m-1} g_l V_{1,2t+1-l \bmod \frac{T}{2}}$$

これらのコンパクトな表現は、

$$(19) \quad \mathbf{W}_2 = \mathcal{B}_2 \mathbf{V}_1 = \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathcal{A}_2 \mathbf{V}_1 = \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 \mathbf{X}$$

となる。ここで、 $\mathcal{A}_1$ 、 $\mathcal{A}_2$  はスケーリング・フィルターの成分  $g_l$  を使って定義され、 $\mathcal{B}_2$  はウェーブレット・フィルターの成分  $h_l$  を使って定義される、

以下、このような計算を段階的に行って、 $T/2^{j-1} \times 1$  ベクトル  $\mathbf{V}_{j-1}$  が得られ、 $T/2^j \times 1$  ベクトル  $\mathbf{W}_j$  と  $\mathbf{V}_j$  の各要素  $W_{j,t}$  と  $V_{j,t}$  は、 $t = 0, 1, \dots, T/2^j - 1$  に対して、以下のように計算される。

$$(20) \quad W_{j,t} = \sum_{l=0}^{m-1} h_l V_{j-1,2t+1-l \bmod T/2^{j-1}}, \quad V_{j,t} = \sum_{l=0}^{m-1} g_l V_{j-1,2t+1-l \bmod T/2^{j-1}}$$

これらは、次のようにコンパクトに表現することができる。

$$(21) \quad \mathbf{W}_j = \mathcal{B}_j \mathbf{V}_{j-1} = \mathcal{B}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1 \mathbf{X} = \mathcal{W}_j \mathbf{X},$$

$$(22) \quad \mathbf{V}_j = \mathcal{A}_j \mathbf{V}_{j-1} = \mathcal{A}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1 \mathbf{X} = \mathcal{V}_j \mathbf{X}$$

ここで、 $\mathcal{A}_j$  と  $\mathcal{B}_j$  は、どちらも  $T/2^j \times T/2^{j-1}$  の行列であり、これらを縦に並べた行列は  $T/2^{j-1}$  次の直交行列である。なお、 $\mathcal{A}_j$  はスケーリング・フィルター  $\{g_l\}$  のみ、 $\mathcal{B}_j$  はウェーブレット・フィルター  $\{h_l\}$  のみから構成される。

以上の計算を  $j = 1, \dots, J$  まで行うことにより、DWT

$$(23) \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_J \\ \mathbf{V}_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_J \mathcal{A}_{J-1} \cdots \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_J \mathcal{A}_{J-1} \cdots \mathcal{A}_1 \end{pmatrix} \mathbf{X}$$

が完了する。この計算の様子を **図 1** に示しておいた。このように、 $\mathcal{W}\mathbf{X}$  という行列の積の演算を回避して、各レベルごとにフィルター演算で DWT を実行する手続きを、**ピラミッド・アルゴリズム**という。この利点は、 $T^2$  のオーダーの積演算を  $T$  のオーダーの積演算に軽減させることにある (Percival-Walden (2000))。

**図 1**

## 5. その他のウェーブレット変換

DWT 以外にも、いくつかのウェーブレット変換が提案されている。DWT では、レベル  $j$  のウェーブレット係数  $\mathbf{W}_j$  は  $T_j = T/2^j$  個の要素からなっている。このことは、 $\mathbf{W}_j$  の要素は  $\mathbf{W}_{j-1}$  の半分になることを意味する。これに対して、各レベルに同数の  $T$  個の要素をもたらし、しかも、レベル  $j$  においては周波数を  $2^j$  個の周波数帯に等分割した上で、各周波数帯に  $T_j$  個の要素を振り分ける変換がある。

具体的には、与えられたレベル  $j$ 、周波数帯  $n$  ( $n = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ) に対して、

$$(24) \quad W_{j,n,t} = \sum_{l=0}^{m-1} a_{n,l} W_{j-1, [\frac{n}{2}], 2t+1-l \bmod T_{j-1}}$$

を  $t = 0, 1, \dots, T_j - 1$  に対して計算する．ただし， $W_{0,0,t} = X_t$  である．また，係数  $a_{n,l}$  は， $n/4$  の余りが 0 あるいは 3 のときはスケーリング係数  $g_l$  となり，それ以外のときはウェーブレット係数  $h_l$  となる値である．このことから， $W_{j,0,t} = V_{j,t}$ ， $W_{j,1,t} = W_{j,t}$  となることがわかる．ただし， $V_{j,t}$  と  $W_{j,t}$  は，(20) 式で定義された DWT である．

例えば，レベル 1 では，2 個の  $T_1 \times 1$  ベクトル  $\mathbf{W}_{1,0}$  と  $\mathbf{W}_{1,1}$  が

$$\mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{V}_1 = \mathbf{A}_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{W}_{1,1} = \mathbf{W}_1 = \mathbf{B}_1 \mathbf{X}$$

により計算される．ここで， $\mathbf{A}_1$ ， $\mathbf{B}_1$  は，前節で導入された量で，それぞれ，スケーリング・フィルター  $\{g_l\}$ ，ウェーブレット・フィルター  $\{h_l\}$  を使って定義される行列である．レベル 1 の変換は DWT そのものである．レベル 2 では，4 個の  $T_2 \times 1$  ベクトルが次のように計算される．

$$\mathbf{W}_{2,0} = \mathbf{A}_2 \mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{W}_{2,1} = \mathbf{B}_2 \mathbf{W}_{1,0} = \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_1 \mathbf{X}$$

$$\mathbf{W}_{2,2} = \mathbf{B}_2 \mathbf{W}_{1,1} = \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{X}, \quad \mathbf{W}_{2,3} = \mathbf{A}_2 \mathbf{W}_{1,1} = \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_1 \mathbf{X}$$

この 4 つのベクトルのうち， $\mathbf{W}_{2,0}$  と  $\mathbf{W}_{2,1}$  は，DWT でも計算される．実際，(19) 式からわかるように， $\mathbf{W}_{2,0} = \mathbf{V}_2$ ， $\mathbf{W}_{2,1} = \mathbf{W}_2$  である．他方， $\mathbf{W}_{2,2}$  と  $\mathbf{W}_{2,3}$  は新たに計算される量である．ここで，行列  $\mathbf{A}_2$  と  $\mathbf{B}_2$  が適用される順番は，(24) 式の係数  $a_{n,l}$  の  $n/4$  の剰余に関する性質に依存して決められる．

以下，同様にして，レベル  $J$  までの変換が実行される．以上のような変換を **DWPT**（分散ウェーブレット・パケット変換）という．

DWPT は，データに含まれる周波数成分について，DWT よりも細分化された結果をもたらすので，季節性を含むようなデータの分析に適している．また，DWPT は，各周波数帯で規則正しく同数の変換を実現しており，その結果の中に DWT の値を含むので，正則な DWT と呼ばれることもある（Percival-Walden (2000)）．

DWPT は，DWT と同様に直交ウェーブレット変換である．直交性を達成するために，フィルター計算の過程で downsampling と呼ばれる一種の間引きがなされている．**図 2** には，レベル 3 までの DWPT による変換の様子を図示してある．この中で，

$$\mathbf{W}_{1,0} \longrightarrow \boxed{\mathbf{A}_2} \xrightarrow{\downarrow 2} \mathbf{W}_{2,0}$$

は、ベクトル  $\mathbf{W}_{1,0}$  が、大きさ 2 の downsampling でスケーリング・フィルタによる演算を経て、 $\mathbf{W}_{2,0}$  に変換されることを意味している。

## 図 2

以上は直交変換のウェーブレットであるが、直交しない変換も提案されている。その 1 つが、Percival-Walden (2000) において MODWT (Maximal Overlap DWT) と命名され、Bruce-Gao (1996) において Non-Decimated DWT と名付けられた変換である。通常の DWT が、レベル  $j$  に  $T_j$  個のウェーブレット係数をもたらすのに対して、MODWT は、各レベルに  $T$  個のウェーブレット係数をもたらす。この点では DWPT と同様に見えるが、DWPT は直交変換であり、downsampling がなされている。実際、DWPT は、レベル  $j$ 、周波数帯  $n$  に  $T_j$  個のウェーブレット係数をもたらす。なお、DWPT に対しても、downsampling せずに、各レベルの各周波数帯に  $T$  個のウェーブレット係数をもたらす変換が考えられる。これを MODWPT (Maximal Overlap DWPT) という。

MODWT あるいは MODWPT は、変換の際に重複やムダを生じる。計算量も  $T \log_2 T$  が増えることが知られている。しかし、(i) 標本サイズが 2 のべき乗でなくともよい、(ii) 結果が時系列の初期時点の取り方に依存しない、(iii) 原系列との位相のずれを生じない、などの DWT や DWPT にはない利点がある。また、後述する推定問題などでは、より精度の高い結果をもたらすことなどが知られている (Percival (1995), Serroukh-Walden-Percival (2000) を参照)。ただし、紙幅の関係で、以下では DWT に焦点をあてて説明したい。

## 6. MRA：多重解像度解析

時系列ベクトル  $\mathbf{X}$  に対して、(10) 式で与えられたウェーブレット係数ベクトル  $\mathbf{W}$  から、次のように  $\mathbf{X}$  を復元することができる。

$$(25) \quad \mathbf{X} = \mathbf{W}' \mathbf{W} = \sum_{j=1}^J \mathcal{W}'_j \mathbf{W}_j + \mathcal{V}'_J \mathbf{V}_J = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_J$$

ここで、 $\mathcal{D}_j = \mathcal{W}'_j \mathbf{W}_j$  は、レベル  $j$  のウェーブレット・ディテールと呼ばれる列ベクトルであり、 $\mathcal{D}_1$  は最も高周波の成分、 $\mathcal{D}_2$  は次の高周波成分、という

ように  $\mathbf{X}$  を周波数分解したものである。各  $\mathcal{D}_j$  の要素の和は 0 である。実際、(10) で定義された  $\mathcal{W}$  は直交行列であることから、

$$\mathcal{D}'_j \mathcal{V}'_j = \mathbf{W}'_j \mathcal{W}_j \mathcal{V}'_j = 0$$

が成り立ち、 $\mathcal{V}'_j$  はすべて 1 からなる列ベクトルの定数倍であることから結論を得る。

他方、 $\mathcal{S}_J$  は、レベル  $J$  のウェーブレット・スムーズと呼ばれ、最も低周波の成分を表すベクトルである。実際、 $\mathcal{S}_J$  の各要素は  $\mathbf{X}$  の平均  $\bar{X}$  からなっている。(25) の分解に基づいた分析を MRA (多重解像度解析) という。

DWT および MRA により、 $\mathbf{X}$  の変動もレベルごとに分解することができる。すなわち、

$$(26) \quad \mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \mathbf{W}'_j \mathbf{W}_j + \mathbf{V}_J^2 = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}'_j \mathcal{D}_j + \mathcal{S}'_J \mathcal{S}_J$$

を得る。 $\mathbf{V}_J = \sqrt{T} \bar{X}$  であるから、 $\mathbf{X}$  の分散分解は、

$$(27) \quad \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} (X_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^J \mathbf{W}'_j \mathbf{W}_j = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^J \mathcal{D}'_j \mathcal{D}_j = \sum_{j=1}^J \mathcal{P}_j$$

となる。ここで、

$$\mathcal{P}_j = \frac{1}{T} \mathbf{W}'_j \mathbf{W}_j = \frac{1}{T} \mathcal{D}'_j \mathcal{D}_j$$

は、ウェーブレット経験スペクトラムと呼ばれ、レベル  $j$  における  $\mathbf{X}$  の変動の大きさを表している。

MRA の経済学への 1 つの応用として、季節調整が提案されている (Gençay-Selçuk-Whitcher (2002, Chap. 4))。季節変動は、データの低周波数成分の影響を過小にゆがめる原因となるので、分析に先だって除去されることが多い。MRA の観点からは、季節変動はウェーブレット・ディテールに対応すると考えられるので、高周波に属する適当な個数の  $\mathcal{D}_j$  を求めて除去してやる、というのが基本的な発想である。

## 7. DWT の例

ここでは、DWT が実際にどのような計算を行っているかを見るために、簡単な例を述べよう。観測値ベクトル  $\mathbf{X}$  の標本サイズを  $T = 2^4 = 16$  とする。

したがって、レベル数は  $J = 4$  であり、第 1 レベルは 8 個、第 2 レベルは 4 個、第 3 レベルは 2 個、第 4 レベルは 1 個に分割される。

次に、フィルターの幅  $m$  を 2 とする。この場合のフィルターとして、

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad g_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を使うことができる。ここで、ウェーブレット・フィルター  $\{h_l\}$  は、連続の場合のハール関数に対応するものである。

第 4 節のピラミッド・アルゴリズムをたどることにより、次の DWT が得られる。

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_1 - X_0 \\ X_3 - X_2 \\ \vdots \\ X_{15} - X_{14} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_3 + X_2 - X_1 - X_0 \\ X_7 + X_6 - X_5 - X_4 \\ X_{11} + X_{10} - X_9 - X_8 \\ X_{15} + X_{14} - X_{13} - X_{12} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X_7 + \cdots + X_4 - X_3 - \cdots - X_0 \\ X_{15} + \cdots + X_{12} - X_{11} - \cdots - X_8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_4 = \frac{1}{4} (X_{15} + \cdots + X_8 - X_7 - \cdots - X_0), \quad \mathbf{V}_4 = \frac{1}{4} (X_{15} + \cdots + X_0)$$

以上の結果からわかるように、 $\mathbf{W}_1$  は隣りあった 2 時点の階差、 $\mathbf{W}_2$  は 2 時点の平均の階差、 $\mathbf{W}_3$  は 4 時点の平均の階差、 $\mathbf{W}_4$  は 8 時点の平均の階差を表す。ただし、直交変換となるように標準化される。

ところで、階差は high-pass フィルターの役割を果たす。他方、和の演算は low-pass フィルターの役割を果たす。したがって、 $\mathbf{W}_j$  は、レベル  $j$  が低いところではデータに含まれる高周波成分を抽出する働きがあり、レベルが高くなるにつれて低周波成分を取り出そうとしていることがわかる。また、同じレベル内では、時間軸をシフトして時間的変動を取り出そうとしていることもわかる。その際、データの重複なしに downsampling による計算が行われていることが見てとれる。このことから、ウェーブレットが周波数と時間の両方を考慮した変換であることが了解されよう。

なお、最後のスケーリング係数  $\mathbf{V}_4$  は、全体の平均を表す。これは、最も低周波の長周期成分を検出するものであり、ウェーブレット係数とは区別される。

## 8. フーリエ変換との比較

ウェーブレット変換の性質を見るために、フーリエ変換との比較を行ってみよう。そのために、人工的な次の4種類のデータを考えよう。標本サイズは、 $T = 128$  とする。

$$X_{1t} = \cos\left(\frac{\pi t}{16}\right), \quad X_{2t} = \begin{cases} X_{1t} & (t = 56, \dots, 72) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$
$$X_{3t} = \frac{X_{1t}}{20} + X_{2t}, \quad X_{4t} = \begin{cases} 0.7t & (t = 56, \dots, 72) \\ 10 + 0.7t & (\text{その他}) \end{cases}$$

図3に示したように、 $X_1$  は周期的データ、 $X_2$  はダミー的なデータ、 $X_3$  はこれらの混合、 $X_4$  は一時的シフトを含むトレンド・データである。

図 3

これらのデータに対して、FFT (有限フーリエ変換) と DWT を適用して、説明力を比較しよう。比較の基準として、標準化された累積2乗和

$$C_t = \frac{\sum_{l=0}^t |\hat{A}_{(l)}|^2}{\sum_{l=0}^{T-1} |A_l|^2} \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

を使うことにする。ここで、 $\{\hat{A}_{(l)}\}$  は、原系列  $\{A_l\}$  を FFT あるいは DWT によって変換した系列  $\{\hat{A}_l\}$  を絶対値の大きい順に並べ替えた順序統計量である。 $\{C_t\}$  は0から1へ単調に増加するが、より早く増加する方が説明力があると考えられる。

表1には、 $C_t$  の値が0.99をはじめて越える  $t+1$  の値が、FFT, DWT および無変換 (データそのもの) に対して報告されている。もちろん、この値が小さい方が望ましい。予想されることであるが、FFT は周期的データ  $X_1$ 、無変換はダミー的なデータ  $X_2$  に対して比較的振る舞いがよい。しかし、FFT と無変換は、それ以外のデータに対しては相性が悪い。他方、DWT は  $X_1$  に対しては次善の振る舞いをしているが、 $X_2$ 、混合的データ  $X_3$ 、およびシフトを伴うトレンド・データ  $X_4$  に対しては最善の振る舞いをしていることがわかる。

表 1 FFT と DWT の振る舞いの比較

データ	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
FFT	2	25	23	25
無変換	105	15	38	112
DWT	27	11	16	12

このように、ウェーブレットは、周期性が局所的であったり、構造変化を伴うようなデータを分析する場合には有効である。ただし、周期性や定常性が強いような優等生的なデータに対しては、わざわざウェーブレットを持ち出すまでもない。というよりも、むしろ、そのようなデータはウェーブレット解析が苦手とするものであり、使い方に留意すべきである、ということも付け加えておく、

## 9. DWT の応用

DWT の応用として、長期記憶性をもたらすフラクショナルな ARIMA モデル

$$\begin{aligned}
 (28) \quad (1-L)^d y_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-L)^j y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} y_{t-j} \\
 &= \varepsilon_t, \quad \{\varepsilon_t\} \sim \text{i.i.d.}(0, \sigma^2)
 \end{aligned}$$

の次数  $d$  の推定を考えよう。ここで、 $L$  はラグ・オペレータ、 $d$  は  $0 < d < 1/2$  となる実数のパラメータである。このとき、 $\{y_t\}$  は、長期記憶性をもつ定常系列となる。実際、自己共分散は、

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \gamma_h &= \text{Cov}(y_t, y_{t-h}) \\
 &= \frac{(-1)^h \Gamma(1-2d)}{\Gamma(1-h-d)\Gamma(1+h-d)} = \frac{\Gamma(h+d)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)\Gamma(1+h-d)} \\
 &= O(h^{2d-1}) \quad (h \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

となることが知られている (Hosking (1981)).

ところで、伝統的な時系列解析では、相関の程度は標本コログラムをプロットすることで見るのが普通である。これに対して、ウェーブレットを使って相関の程度を見ることも可能である。それは、前節で導入した、標準化された累積 2 乗和

$$C_t = \frac{\sum_{l=0}^t |\hat{y}_{(l)}|^2}{\sum_{l=0}^{T-1} |y_l|^2} \quad (t = 0, 1, \dots, T-1)$$

を使うことである。ここで、 $\{\hat{y}_{(l)}\}$  は、 $\{y_l\}$  を DWT 変換したあとの系列を絶対値の大きい順に並べ替えた順序統計量である。図 4 は、(28) のモデルにおいて、正規乱数を使って  $d = 0.4$  の場合に生成された  $T = 128$  のデータから得られた  $C_t$  の値をプロットしたものである。ウェーブレット・フィルターとしては、Daubechies の  $D(4)$  を使った。同時に、変換しない系列そのものの  $C_t$  もプロットされている。図の横軸は対数目盛りである。両者の違いは非常に大きい。実際、(28) のモデルで  $d = 0$  の場合、すなわち、独立系列の場合、図 5 に示したように、 $C_t$  のプロットは、DWT 変換後も変換前とほとんど変わらない。このように、ウェーブレット変換によって、データの従属性を見ることが可能となる。

図 4                      図 5

以下、ここでは、DWT を使って、次数  $d$  の推定を考えよう。そのために、 $\sigma_j^2$  をレベル  $j$  のウェーブレット係数  $W_j$  の各要素の分散とする。 $\sigma_j^2$  は、レベル  $j$  のウェーブレット分散と呼ばれる。このとき、ウェーブレット分散とレベル  $j$  との間に、ほぼ次の関係が成り立つことが示される (McCoy-Walden (1996), Jensen (1999)).

$$(30) \quad \log \sigma_j^2 = \text{constant} + d \log 2^{2j}$$

したがって、 $\sigma_j^2$  の推定量  $\hat{\sigma}_j^2$  を使って、 $\hat{\sigma}_j^2$  を  $2^{2j}$  に回帰することにより、 $d$  を推定することができる。

このことをシミュレーションで確かめてみよう。図 6 には、モデル (28) から得られた  $2^9 = 512$  個のデータが示されている。ただし、 $d = 0.4$  であり、誤差項には標準正規乱数を使っている。

## 図 6

このデータに対して、ウェーブレット分散の推定値  $\hat{\sigma}_j^2$  が図 7 に + 記号で示されている。ただし、横軸は  $\log 2^{2j}$ 、縦軸は  $\log \hat{\sigma}_j^2$  であり、マザー・ウェーブレットはドーブシーの  $D(4)$  フィルターを使った。実線は傾き 0.431 の回帰直線であり、この値が  $d$  の推定値（真の値は 0.4）となる。

## 図 7

なお、ここでは DWT に基づく最小 2 乗法を考えたが、MODWT に基づく推定を行うことも可能である。そして、DWT の場合よりもよい結果が得られることが示されている（Percival-Walden (2000)）が、ここでは省略する。

しかし、これらは最小 2 乗推定であり、最尤推定法よりも精度が悪い。ウェーブレットの利点は、近似的な最尤推定を容易に行える点にある。その理由は、ウェーブレット変換  $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$  により、ウェーブレット係数が無相関に近い系列となるからである（McCoy-Walden (1996), Jensen (1999, 2000)）。実際、図 8 の実線は、図 6 のデータの自己相関を示すが、従属性が非常に強いことがわかる。点線は、無相関の場合に得られるそれぞれのラグの自己相関の 95% 信頼区間である。他方、破線は、256 個からなる第 1 レベルのウェーブレット係数  $\mathbf{W}_1$  の自己相関であり、ほとんど無相関に変換されていることが見てとれる。

## 図 8

ここでは、定常な長期記憶系列 ( $0 < d < 1/2$ ) を考えたが、対象となる系列は  $d \geq 1/2$  以上の非定常系列でもよい。その理由は、ウェーブレット変換が、フィルタリング演算として定常化変換の作用をもっているからである（Percival-Walden (2000)）。

経済時系列への DWT の応用としては、この他にも、時系列の相関に関する検定や、構造変化の検定などがある。詳しくは、Gilbert (1999), Lee-Hong (2001), Percival-Walden (2000) を参照されたい。

## 10. 数学的補論

以下では、ウェーブレット解析の数学理論について簡単に述べる．詳細については、Daubechies (1988), 猪狩 (1996), Percival-Walden (2000), 謝-鈴木 (2002) などを参照されたい．

まず、第 2 節で述べたマザー・ウェーブレット  $\psi(t)$  について説明しよう．そのためにはスケーリング関数（あるいはファザー・ウェーブレット）と呼ばれる関数  $\phi(t)$  を導入する必要がある． $\phi(t)$  は、信号  $x(t)$  と同じ 2 乗可積分な関数空間  $L^2(R)$  に属する．そのような  $\phi(t)$  に対して、マザー・ウェーブレットと同様に、

$$(31) \quad \phi_{j,k}(t) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k) \quad (j, k \in \mathcal{Z})$$

を考える．ここで、 $\phi_{0,k}(t) = \phi(t - k)$  ( $k \in \mathcal{Z}$ ) により張られる空間を  $V_0$  として、 $\{\phi_{0,k}(t); k \in \mathcal{Z}\}$  が  $V_0$  の正規直交基底となるものとする．したがって、

$$(32) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,k}(t) \phi_{0,l}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-k) \phi(t-l) dt = \begin{cases} 1 & (k=l \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

である．関数列  $\{\phi_{0,k}(t); k \in \mathcal{Z}\}$  が  $V_0$  において正規直交基底となるための必要十分条件は、

$$(33) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\lambda + k)|^2 = 1 \quad (\lambda \in R)$$

が成り立つことである．ここで、 $\hat{\phi}(\cdot)$  は、 $\phi(\cdot)$  のフーリエ変換

$$\hat{\phi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) e^{-2\pi i \lambda t} dt$$

を表す．

空間  $V_0$  は  $L^2(R)$  の閉部分空間であり、レベル 0 の近似空間と呼ばれる．近似空間の意味合いを調べるために、 $\phi(t)$  として、

$$(34) \quad \phi(t) = \phi^{(H)}(t) = \begin{cases} 1 & (-1 \leq t \leq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

を取り上げよう．これをハールのスケーリング関数という． $\phi_{0,k}^{(H)}(t) = \phi^{(H)}(t-k)$  の正規直交性は (32) が成り立つことから明らかである．なお、今の場合、

$$\hat{\phi}(\lambda) = \int_{-1}^0 e^{-2\pi i \lambda t} dt = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} e^{\pi i \lambda}$$

となるので,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\lambda + k)|^2 = \frac{\sin^2 \pi \lambda}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda + k)^2} = 1$$

を得る.

ここで, ウェーブレット変換と同様の積分

$$c_{0,k}^{(H)} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,k}^{(H)}(t) x(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(H)}(t-k) x(t) dt = \int_{k-1}^k x(t) dt$$

を考えよう. これは,  $x(t)$  に対するレベル 0 のスケーリング係数と呼ばれ, 今の場合, 幅が 1 の区間  $[k-1, k]$  における  $x(t)$  の平均となる. したがって,

$$x_0^{(H)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{0,k}^{(H)} \phi^{(H)}(t-k) \in V_0$$

は,  $x(t)$  の 1 つの近似 (レベル 0 の近似) を与える. もちろん,  $x(t)$  が  $V_0$  に属するならば,  $x_0^{(H)}(t) = x(t)$  となる.

同様にして,  $\phi_{j,k}(t)$  ( $k \in \mathcal{Z}$ ) により張られる空間を  $V_j$  とすれば, ハールのスケーリング関数の場合には, レベル  $j$  のスケーリング係数は,

$$c_{j,k}^{(H)} = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(H)}(2^{-j}t - k) x(t) dt = 2^{-j/2} \int_{(k-1)2^j}^{k2^j} x(t) dt$$

により定義される. ここで,  $2^{-j/2} c_{j,k}^{(H)}$  は, 幅が  $2^j$  の区間  $[(k-1)2^j, k2^j]$  における  $x(t)$  の平均を表すから,

$$x_j^{(H)}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k}^{(H)} 2^{-j/2} \phi^{(H)}(2^{-j}t - k) \in V_j$$

は,  $x(t)$  のレベル  $j$  の近似を与える.  $V_j$  は  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間であり, レベル  $j$  の近似空間と呼ばれる.

一般に, このような近似空間の列  $\{V_j\}$  について, 次のことを仮定する.

- (i)  $\{V_j\}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間列であり, すべての  $j$  に対して,  $V_j \subset V_{j-1}$  である.
- (ii)  $\{V_j\}$  の和集合は  $L^2(\mathbb{R})$  で稠密となり, その積集合は空である.
- (iii)  $g(t)$  が  $V_0$  に属することと,  $g(t-k)$  ( $k \in \mathcal{Z}$ ) が  $V_0$  に属することは同値である.
- (iv)  $g(t)$  が  $V_j$  に属することと,  $g(2t)$  が  $V_{j-1}$  に属することは同値である.

(v)  $V_0$  に属するスケーリング関数  $\phi(t)$  が存在して,  $\{\phi(t-k); k \in \mathcal{Z}\}$  が  $V_0$  の正規直交基底となる.

上記の条件をみたす  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}$  のことを **MRA** (多重解像度解析) という. 第 6 節で説明した MRA は, 離散時間の場合である.  $\{V_j\}$  は階層構造をもっており,  $V_j$  は  $V_{j-1}$  の閉部分空間となる. 解像度の観点からは,  $V_j$  は  $V_{j-1}$  よりも解像度が低いという. そして, (31) で定義されたレベル  $j$  のスケーリング関数  $\phi_{j,k}(t)$  ( $k \in \mathcal{Z}$ ) は, 上記 (v) の条件から  $V_j$  の正規直交基底となる. 実際, (32) の積分は, 変数変換により,

$$(35) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{0,k}(t) \phi_{0,l}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t) \phi_{j,l}(t) dt$$

となる.

さらに,  $V_j$  の直交補空間  $W_j$  が存在して,  $V_{j-1}$  は

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$

と直交分解される.  $W_j$  はレベル  $j$  の**細部空間**と呼ばれ, 解像度を  $j-1$  から  $j$  に下げたときの差を表す.

さて, マザー・ウェーブレット  $\psi(t)$  はレベル 0 の細部空間  $W_0$  に属するものと仮定する. このとき,  $\{\psi_{j,k}(t); k \in \mathcal{Z}\}$  は  $W_j$  の正規直交基底となり,

$$(36) x_{j-1}(t) = x_j(t) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

と表すことができる. ただし,

$$x_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \phi_{j,k}(t)$$

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{j,k}(t) x(t) dt, \quad d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{j,k}(t) x(t) dt$$

である (証明は Daubechies (1992), 猪狩 (1996) 参照). そして,

$$(37) x(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

が成り立ち, したがって,

$$(38) L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=-\infty}^{\infty} W_j$$

を得る。結局、 $x_j(t)$  は  $L^2(\mathbb{R})$  に属する信号  $x(t)$  の空間  $V_j$  への直交射影となり、それは  $x(t)$  の逐次近似を与え、その近似は  $j \rightarrow -\infty$  のとき、 $x(t)$  に一致することが保証される。

今までの議論から、マザー・ウェーブレットは、スケーリング関数により生成された MRA に対して、直交補空間を張ることがわかった。特に、 $V_0 \subset V_{-1}$  であるから、 $\phi(t) \in V_0$  ならば、 $\phi(t) \in V_{-1}$  でもある。したがって、 $V_{-1}$  が  $\phi_{-1,k}(t) = \sqrt{2}\phi(2t-k)$  により張られる空間であることから、

$$(39) \quad \phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(2t-k)$$

が成り立つ。これをトゥー・スケール関係 (two-scale relationship) という。ただし、

$$p_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{-1,k}(t) \phi(t) dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-k) \phi(t) dt$$

であり、 $\{p_k\}$  はレベル 0 のスケーリング・フィルターと呼ばれる。第 4 節で定義したスケーリング・フィルター  $\{g_k\}$  は、 $g_k = p_{-k}$  である。

マザー・ウェーブレット  $\psi(t)$  についても、 $\psi(t) \in V_{-1}$  であるから、

$$(40) \quad \psi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \phi(2t-k)$$

が成り立つ。ここで、

$$q_k = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{-1,k}(t) \psi(t) dt = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(2t-k) \psi(t) dt$$

であり、 $\{q_k\}$  はレベル 0 のウェーブレット・フィルターと呼ばれる。第 4 節で定義したウェーブレット・フィルター  $\{h_k\}$  は、 $h_k = q_{-k}$  である。

次に、(39) のトゥー・スケール関係が示唆する制約を求めよう。そのために、(39) 式の両辺にフーリエ変換を適用して、

$$(41) \quad \hat{\phi}(\lambda) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \frac{e^{-\pi i \lambda k}}{2} \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \frac{P\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{2}}$$

を得る。ただし、 $P(\lambda)$  は  $\{p_k\}$  のフーリエ変換

$$P(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{-2\pi i \lambda k}$$

である。(41) 式は周波数領域におけるトゥー・スケール関係であり、 $\lambda = 0$  を代入することにより、 $\hat{\phi}(0) \neq 0$  ならば、

$$(42) \quad P(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k = \sqrt{2}$$

を得る。実際、 $\hat{\phi}^2(0) = 1$  となることが示される (Daubechies (1992)) ので、 $\hat{\phi}(0) = 1$  と規準化するのが普通である。このとき、(41) 式は、

$$\hat{\phi}(\lambda) = \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \frac{P\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \frac{P\left(\frac{\lambda}{2^k}\right)}{\sqrt{2}} \rightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \frac{P\left(\frac{\lambda}{2^k}\right)}{\sqrt{2}}$$

となる。なお、(42) 式は、スケーリング・フィルタに関する (14) の最初の条件に対応する。

同様に、(40) 式の両辺にフーリエ変換を適用して、

$$(43) \quad \hat{\psi}(\lambda) = \hat{\phi}\left(\frac{\lambda}{2}\right) \frac{Q\left(\frac{\lambda}{2}\right)}{\sqrt{2}}$$

を得る。ただし、 $Q(\lambda)$  は  $\{q_k\}$  のフーリエ変換

$$Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k e^{-2\pi i \lambda k}$$

である。(43) に  $\lambda = 0$  を代入することにより、 $\hat{\psi}(0) = 0$  であることから、

$$(44) \quad Q(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k = 0$$

が得られる。これは、ウェーブレット・フィルタに関する (11) の最初の条件に対応する。

ところで、今までの議論から、 $\phi(t)$  と  $\psi(t)$  は次の直交関係をみたさなければならぬ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-k) \phi(t-l) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t-k) \psi(t-l) dt = \delta_{k,l} \quad (k \neq l \in \mathcal{Z})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-k) \psi(t-l) dt = 0 \quad (k, l \in \mathcal{Z})$$

さらに、

$$(45) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

が成り立つ。前者は  $\hat{\phi}(0) = 1$ ，後者は  $\hat{\psi}(0) = 0$  と同値である。

再度，(39) のトゥー・スケール関係を使って， $n \in \mathcal{Z}$  に対して

$$\phi(t) \phi(t+n) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_k p_l \phi(2t-k) \phi(2t+2n-l)$$

となる。この両辺を  $t$  に関して積分することにより， $\{\phi(t-k); k \in \mathcal{Z}\}$  の正規直交性より，

$$(46) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k p_{k+2n} = \begin{cases} 1 & (n=0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

を得る。すなわち，スケーリング・フィルター  $\{p_k\}$  は，変動が 1 であり，任意の偶数項シフトしたものと直交する。この条件をみたすフィルターの幅  $K$  は偶数である。実際， $p_0, p_1, \dots, p_{K-1}$  が奇数幅  $K$  のフィルターならば， $K-1$  は偶数であるから，

$$\sum_{k=0}^{K-1} p_k p_{k+K-1} = p_0 p_{K-1} = 0$$

が成り立つことになる。しかし，条件より， $p_0 p_{K-1} \neq 0$  であるから上の等式は成立しない。

他方，(39) と (40) から

$$\phi(t) \psi(t+n) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} p_k q_l \phi(2t-k) \phi(2t+2n-l)$$

が得られ，この両辺を  $t$  に関して積分すると， $\{\phi(t-k); k \in \mathcal{Z}\}$  と  $\{\psi(t-l); l \in \mathcal{Z}\}$  の直交性より，

$$(47) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k q_{k+2n} = 0 \quad (n \in \mathcal{Z})$$

となる。すなわち，スケーリング・フィルターとウェーブレット・フィルターは，任意の偶数項シフトに対して直交する。

ウェーブレット・フィルター  $\{q_k\}$  に関する制約条件を求めるために，

$$(48) \quad q_k = (-1)^k p_{1-k-K}$$

となる場合を考えよう。これは、(13) 式と同値であり、 $\{p_k\}$  に対応する QM (quadrature mirror) フィルターと呼ばれている (理由については, Daubechies (1992) 参照)。このとき, (46) より,

$$(49) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k q_{k+2n} = \begin{cases} 1 & (n = 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

が成り立つ。

以上より, 第 4 節で定義したスケーリング・フィルター  $\{g_k\}$  に関して, (14) の 3 つの制約条件が, (42), (46) で得られたことになる。他方, ウェーブレット・フィルター  $\{h_l\}$  に関する (11) の 3 つの制約条件が, (44), (49) で得られた。また, 両者の直交条件 (15) は, (47) で得られた。ただし, これらの条件だけでは, 一意的なフィルターを求めることは不可能である。ここでは説明を省略するが, Daubechies (1992) は, minimum delay, あるいは vanishing moments と呼ばれる追加的な条件を課すことにより, さまざまな幅のフィルターの解を数値計算により求めている。

## 参考文献

- 猪狩惺 (1996) 『実解析入門』岩波書店.
- 加藤剛, 柴田里程 (2001) 『ウェーブレットと統計解析』日本統計学会チュートリアルセミナー.
- 榊原進 (1995) 『ウェーブレット ビギナーズガイド』東京電機大学出版局.
- 謝衷潔, 鈴木武 (2002) 『ウェーブレットと確率過程入門』内田老鶴圃.
- Bruce, A. and H. Y. Gao (1996) *Applied Wavelet Analysis with S-PLUS*. New York: Springer.
- Daubechies, I. (1992) *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia: SIAM.
- Gençay, R., Selçuk, F., and Whitcher, B. (2002) *An Introduction to Wavelets and Other Filtering Methods in Finance and Economics*. New York: Academic Press.
- Gilbert, S. D. (1999) “Testing for the onset of trend, using wavelets,” *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 20, 513-526.
- Hosking, J. R. M. (1981) “Fractional differencing,” *Biometrika*, Vol. 68, 165-176.
- Jensen, M. J. (1999) “Using wavelets to obtain a consistent ordinary least squares estimator of the long-memory parameter,” *Journal of Forecasting*, Vol. 18, 17-32.
- Jensen, M. J. (2000) “An alternative maximum likelihood estimator of long-memory processes using compactly supported wavelets,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 24, 361-387.
- Lee, J. and Hong, Y. (2001) “Testing for serial correlation of unknown form using wavelet methods,” *Econometric Theory*, Vol. 17, 386-423.

- McCoy, E. J. and Walden, A. T. (1996) “Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes,” *Journal of Computational and Graphical Statistics*, Vol. 5, 26-56.
- Percival, D. B. (1995) “On estimation of the wavelet variance,” *Biometrika*, Vol. 82, 619-631.
- Percival, D.B. and Walden, A. T. (2000) *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Serroukh, A., Walden, A. T., and Percival, D. B. (2000) “Statistical properties and uses of the wavelet variance estimator for the scale analysis of time series,” *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 95, 184-196.

図 1 DWT の計算

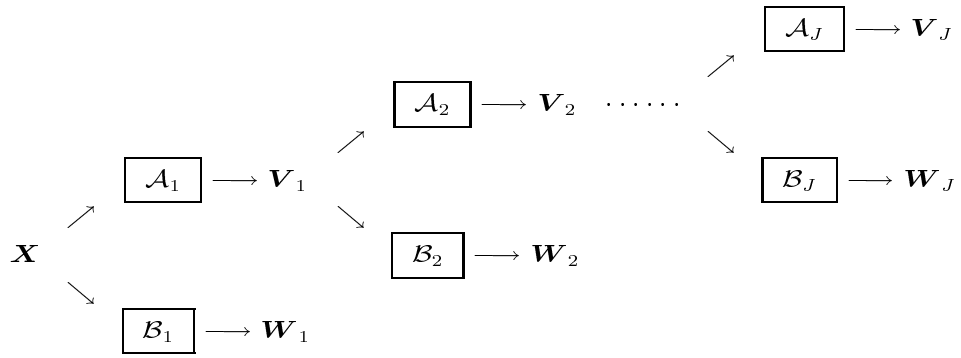


図 2 DWPT の計算

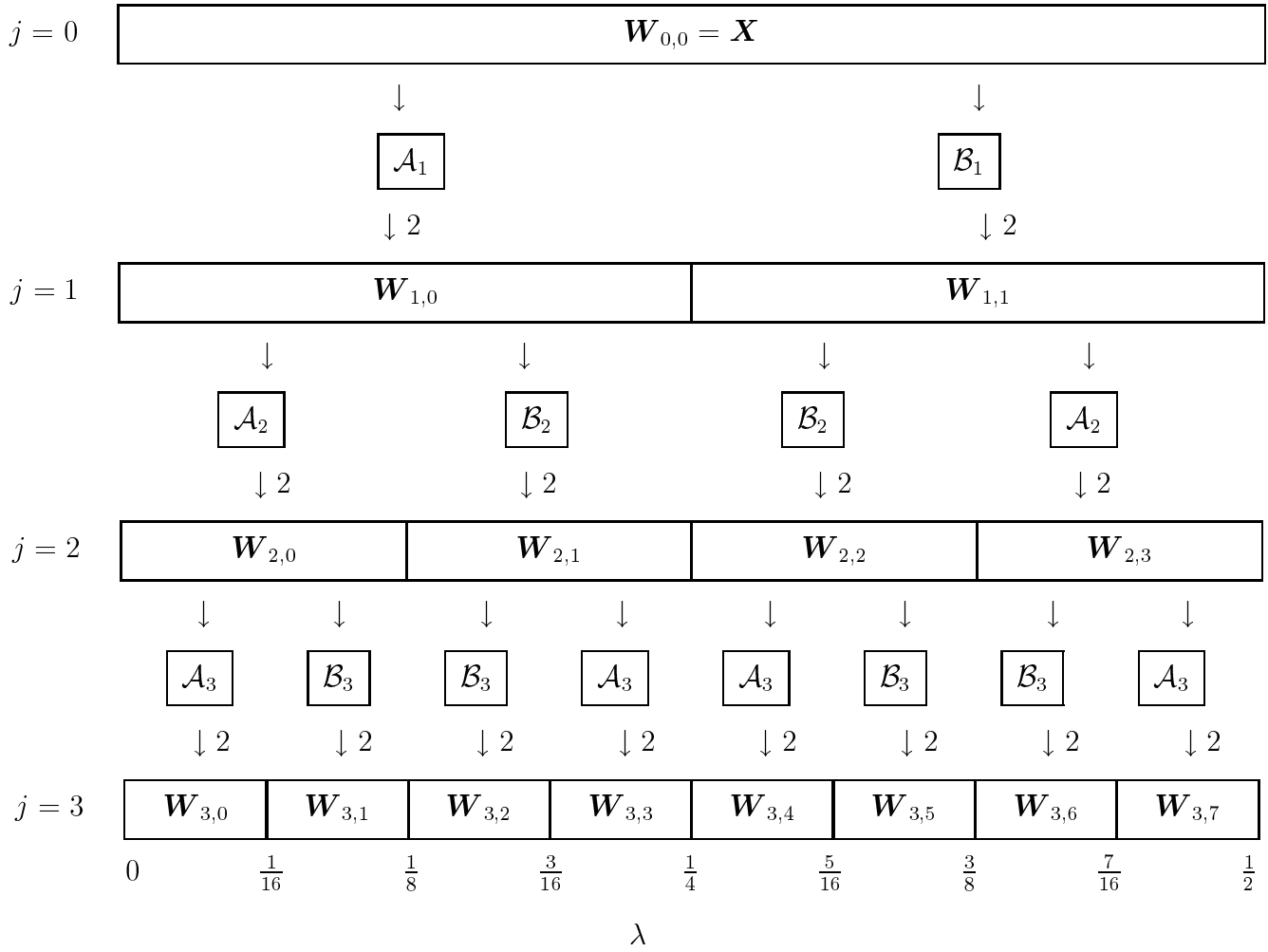
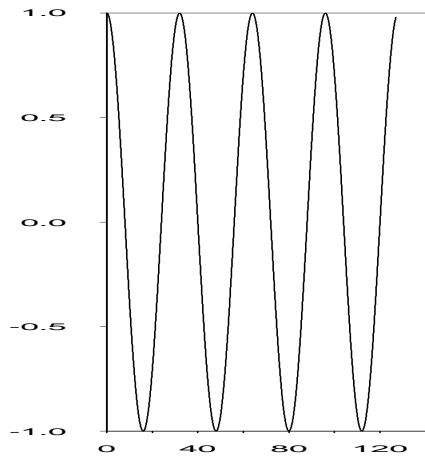
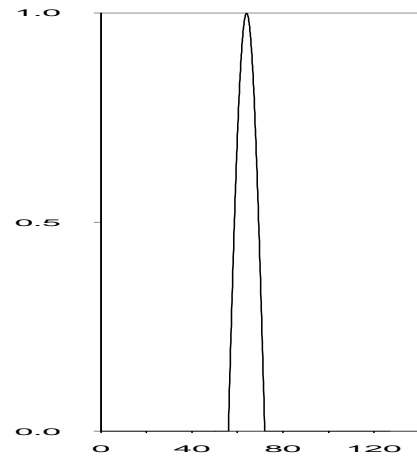


図 3 比較用データ

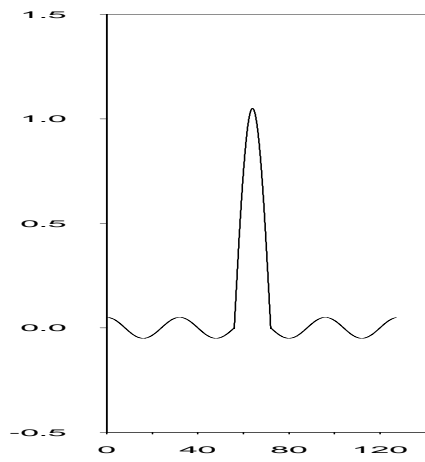
$X_1$



$X_2$



$X_3$



$X_4$

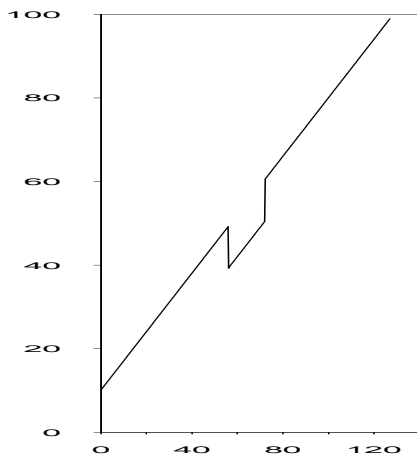


図 4 長期記憶時系列 ( $d = 0.4$ ) の場合の  $C_t$

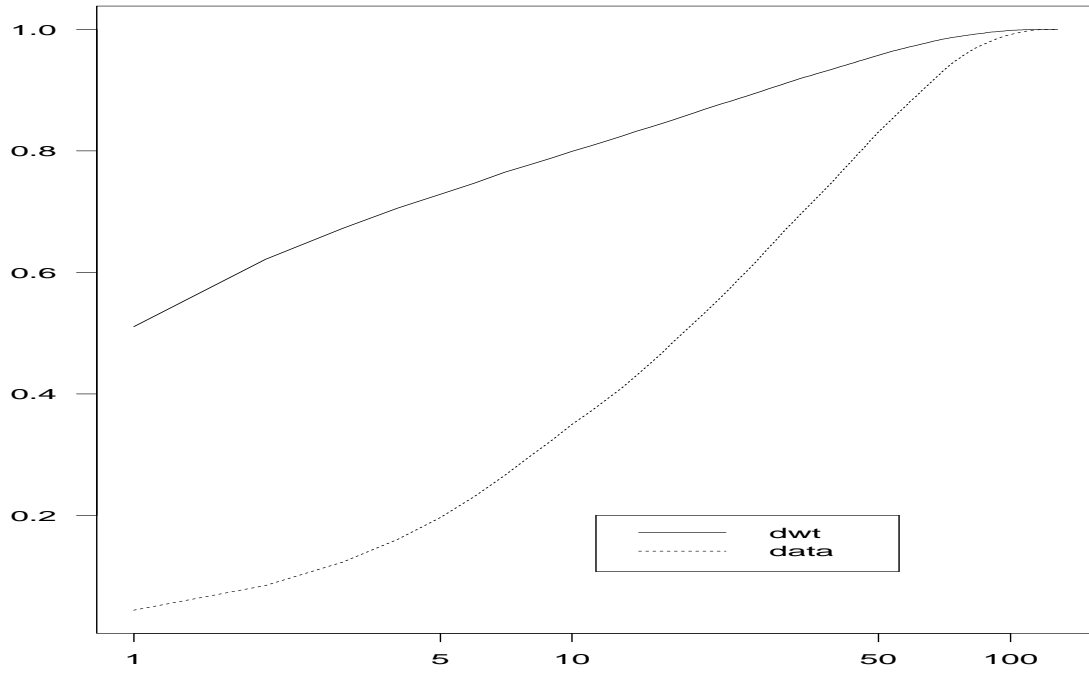


図 5 独立系列の場合の  $C_t$

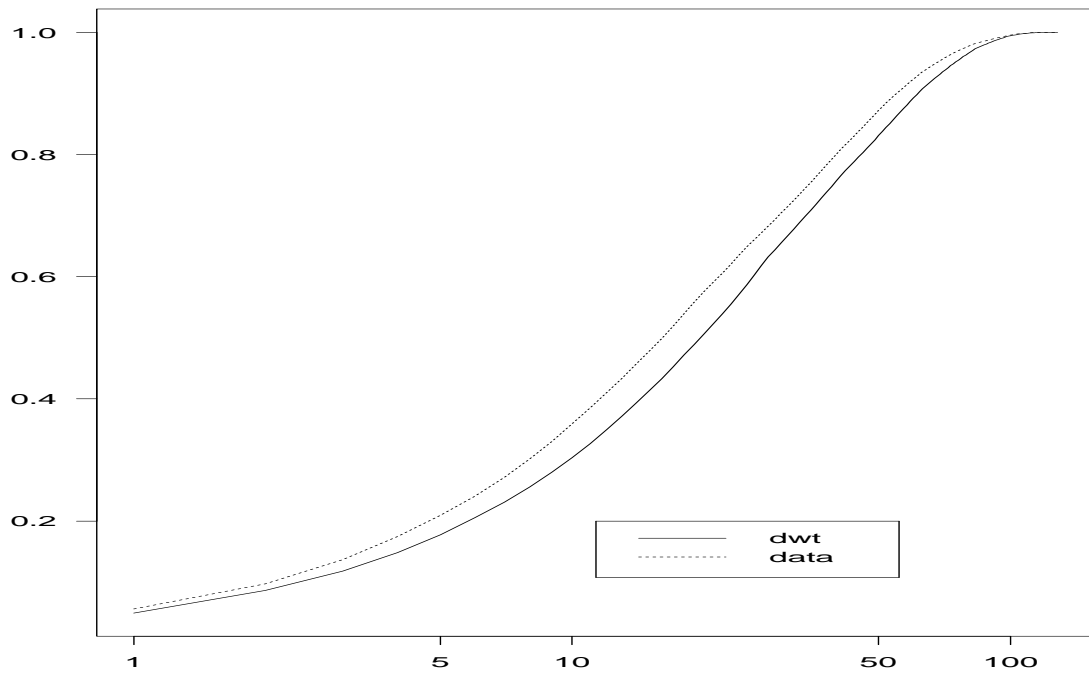


図 6 長期記憶モデル (28) からのデータ

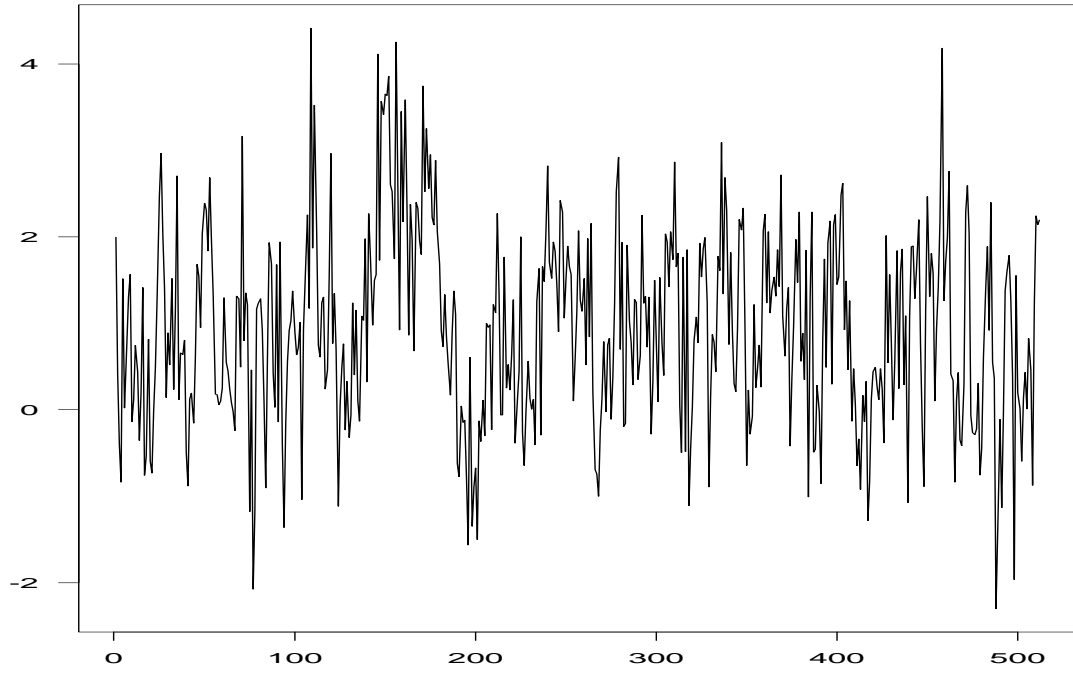


図 7 ウェーブレット分散と回帰直線

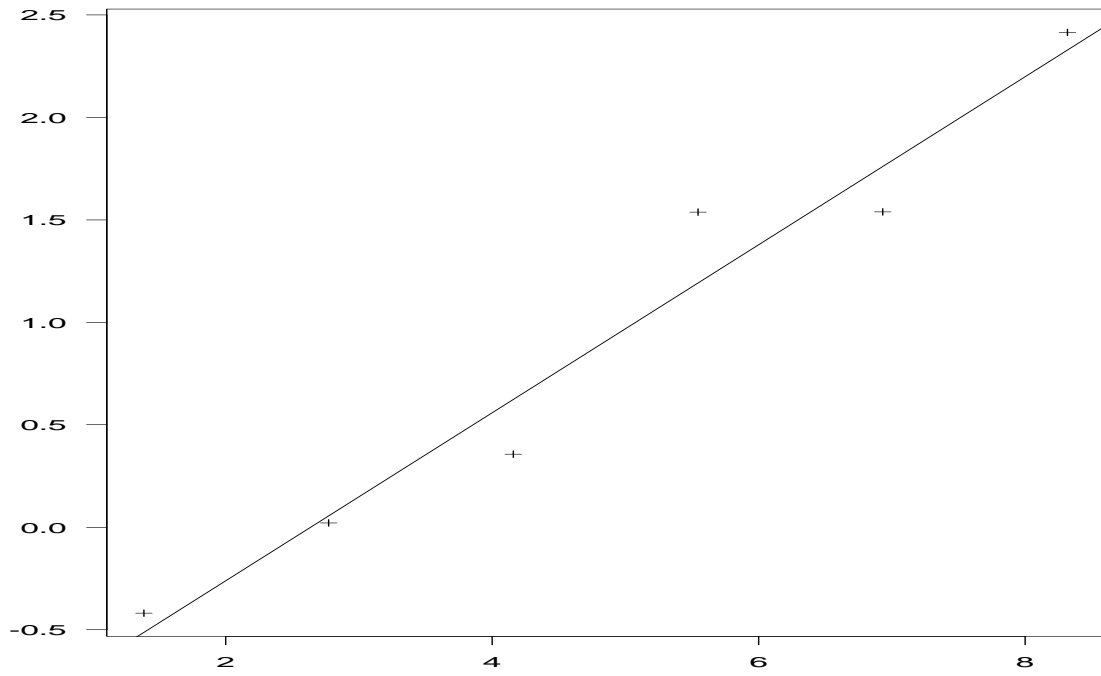


図 8 原系列とレベル 1 のウェーブレット係数の自己相関

