

## 第 10 章「統計的仮説検定」

### ・統計的仮説検定の手続き

- (1) 未知のパラメータに関して，検定されるべき仮説（帰無仮説）と，その否定命題である仮説（対立仮説）を設定する．対立仮説には，片側仮説と両側仮説がある．
- (2) 標本に基づいて，仮説を検定するための統計量（検定統計量）を構成し，仮説のもとでの分布（帰無分布）を求める．
- (3) 有意水準を設定する．
- (4) 対立仮説の形に対応して，帰無仮説の棄却域と受容域を決める．棄却域と受容域の境界点（有意点）は，有意水準に対応して決める．
- (5) 実際のデータから検定統計量の値を計算して，その値が有意点を越えるときには帰無仮説を棄却，そうでなければ受容する．

### 1．正規母集団の平均の検定

正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からのサイズ  $n$  のランダム標本を  $X_1, \dots, X_n$  とする．

#### (1) 平均の検定（分散既知）

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{棄却域 :} \quad \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} \right| > z_{\alpha/2}$$

#### (2) 平均の検定（分散未知）

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$$\text{棄却域 :} \quad \left| \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\hat{\sigma}} \right| > t_{\alpha/2}^{(n-1)}$$

例 正規母集団からのサイズ 10 のランダム標本の平均は 30.47, 標準偏差は 3 であった . このとき , 母集団平均  $\mu$  に関する仮説

$$H_0 : \mu = 28 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \mu \neq 28$$

を有意水準 5 % で検定しよう .

$t(n-1) = t(9)$  分布の上側 2.5 % は ,  $t_{0.025}^{(9)} = 2.262$  である . 他方 , 検定統計値は ,

$$\frac{\sqrt{10}(30.47 - 28)}{3} = 2.604$$

であり , これは有意点を越えるので帰無仮説は棄却される ( = 5 % の有意水準で , データの平均 30.47 は帰無仮説の値 28 と有意に異なる ) .

両側検定と信頼区間の関係

有意水準  $\alpha$  の両側検定において , 帰無仮説が受容 ( 棄却 ) されることと , 信頼係数  $1 - \alpha$  の信頼区間に帰無仮説のもとでのパラメータの値が入っている ( 入らない ) ことは同等である .

## 2 . 正規母集団の分散の検定

正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からのサイズ  $n$  のランダム標本を  $X_1, \dots, X_n$  とする .

### (1) 分散の検定 ( 平均既知 )

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\text{棄却域 : } \frac{n \tilde{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n)$$

### (2) 分散の検定 ( 平均未知 )

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

$$\text{棄却域 : } \frac{(n-1) \hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)$$

例 正規母集団からのサイズ 10 のランダム標本の平均は 30.47, 標準偏差は 3 であった。このとき, 母集団分散  $\sigma^2$  に関する仮説

$$H_0 : \sigma^2 = 4 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \sigma^2 > 4$$

を有意水準 5% で検定しよう。

$\chi^2(9)$  分布の上側 5% 点は  $\chi_{0.05}^2(9) = 16.92$  である。他方, 検定統計値は

$$\frac{(10 - 1) \times 3^2}{4} = 20.25$$

である。この値は有意点を越えるから帰無仮説は棄却される。

### 3. 比率 $p$ の検定

比率の検定 (大標本の場合)

$$H_0 : p = p_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p \neq p_0$$

$$\text{棄却域 : } \left| \frac{\bar{X} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}} \right| > z_{\alpha/2}$$

例 失業率調査において, 労働力人口の 10,000 人を調査したところ, 500 人が失業していた。母集団失業率  $p$  は 4% を越えていると考えられるかどうかを, 次の検定

$$H_0 : p = 0.04 \quad \text{vs.} \quad H_1 : p > 0.04$$

により, 有意水準 5% で検定してみよう。

右片側検定であり, 有意点は  $z_{0.05} = 1.645$  である。検定統計値は,

$$\frac{0.05 - 0.04}{\sqrt{0.04 \times 0.96/10000}} = 5.13$$

となり, 帰無仮説は明らかに棄却される (= 母集団失業率は, 4% よりも有意に高い)。

### 4. 2つの正規母集団平均差の検定

(1) 2つの正規分布の平均差の検定 (分散既知)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\text{棄却域:} \quad \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \right| > z_{\alpha/2}$$

(2) 2つの正規分布の平均差の区間推定 ( $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  は未知)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\text{棄却域:} \quad \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \right| > t_{\alpha/2}^{(m+n-2)}$$

(3) 2つの正規分布の平均差の検定 (大標本の場合)

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$\text{棄却域:} \quad \left| \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n}}} \right| > z_{\alpha/2}$$

例 20匹の同じようなマウスのうち, 10匹に生ピーナッツ, 別の10匹に焼きピーナッツを与えて飼育した. 一定期間後に体重を測定したところ, 前者の平均は 59.9 g, 後者の平均は 55.8 g であった. また, 20匹の体重の標準偏差は 3.9 g であった. このとき, 成長に差があるかどうかの仮説

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

を有意水準 5% で検定しよう.

有意点は  $t(18)$  の分布の上側 2.5% 点  $t_{0.025}^{(18)} = 2.1$  である. 他方, 検定統計値は

$$\frac{59.9 - 55.8}{3.9 \times \sqrt{1/10 + 1/10}} = 2.35$$

であるから，仮説は棄却され，成長に有意差がある．

## 5．2つの正規母集団の分散比の検定

2つの正規分布の分散比の検定

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\text{棄却域:} \quad \hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2 < F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1) \quad \text{or} \quad \hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2 > F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$$

例 20匹の同じようなマウスのうち，10匹に生ピーナッツ，別の10匹に焼きピーナッツを与えて飼育した．一定期間後に体重を測定したところ，前者の分散は9.14 g，後者の分散は21.07 gであった．両者の体重のばらつきに差があるかどうかの仮説

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs.} \quad H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

を有意水準5%で検定してみよう．

有意点は  $F(9, 9)$  の下側2.5%点  $F_{0.975}(9, 9) = 0.248$ ，あるいは  $F(9, 9)$  の上側2.5%点  $F_{0.025}(9, 9) = 4.026$  である．他方，検定統計値は

$$\frac{9.14}{21.07} = 0.434$$

となり，有意点を越えないから，等分散の仮説は棄却できない．

## 6．2つの母集団の比率の差の検定

2つの母集団の比率の差の検定

$$H_0: p_1 = p_2 \quad \text{vs.} \quad H_1: p_1 \neq p_2$$

$$\text{棄却域:} \quad \frac{|\hat{p}_1 - \hat{p}_2|}{\sqrt{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)/m + \hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)/n}} > z_{\alpha/2}$$

例 両親との同居に関して，無作為に選んだ100人の男性と150人の女性に意見を聞いたところ，それぞれ52人と55人が賛成であった．男女の意見に差があるかどうかについて，仮説

$$H_0: p_M = p_F \quad \text{vs.} \quad H_1: p_M \neq p_F$$

を有意水準5%で検定してみよう．

有意点は  $N(0, 1)$  の上側 2.5 % 点  $z_{0.025} = 1.96$  である。他方、検定統計値は

$$\frac{52/100 - 55/150}{\sqrt{52/100 \times (1 - 52/100)/100 + 55/150 \times (1 - 55/150)/150}} = 2.41$$

であるから、帰無仮説は棄却され、男女間の意見に有意差がある。

## 7. 適合度検定

母集団が  $k$  個のカテゴリーに分割されていて、それぞれの比率が  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_k)$  であるとする。このとき、 $\mathbf{p}$  が、ある確率分布  $\mathbf{p}_0$  に等しい(適合する)かどうかという仮説

$$H_0: \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = (p_{10}, \dots, p_{k0}) \quad \text{vs.} \quad H_1: \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0$$

を検定する問題を考えよう。

(1) 適合度検定 (未知パラメータを含まない場合)

$$H_0: \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = (p_{10}, \dots, p_{k0}) \quad \text{vs.} \quad H_1: \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0$$

$$\text{棄却域:} \quad \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n p_{i0})^2}{n p_{i0}} > \chi_{\alpha}^2(k-1)$$

$n_i$ : = 第  $i$  カテゴリーの観測度数

$n p_{i0}$ : = 第  $i$  カテゴリーの期待度数

例 日本人の血液型の分布は AB: A: B: O = 0.09: 0.37: 0.22: 0.32 である。ある町の 800 人について調べたところ、AB 型 85 人、A 型 317 人、B 型 168 人、O 型 230 人であった。日本人の血液型の分布に適合しているかどうかの仮説

$$H_0: \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 = (0.09, 0.37, 0.22, 0.32) \quad \text{vs.} \quad H_1: \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0$$

を有意水準 5 % で検定してみよう。

有意点は  $\chi^2(3)$  の分布の上側 5 % 点  $\chi_{0.05}^2(3) = 7.81$  である。他方、検定統計値は

$$\frac{(85 - 800 \times 0.09)^2}{800 \times 0.09} + \frac{(317 - 800 \times 0.37)^2}{800 \times 0.37} + \frac{(168 - 800 \times 0.22)^2}{800 \times 0.22} + \frac{(230 - 800 \times 0.32)^2}{800 \times 0.32} = 6.84$$

となり、帰無仮説は棄却されないため、日本人の血液型分布との乖離は見られない。

(2) 適合度検定 ( $s$  個の未知パラメータを含む場合)

$$H_0: \mathbf{p} = \mathbf{p}_0(\theta) = (p_{10}(\theta), \dots, p_{k0}(\theta)) \quad \text{vs.} \quad H_1: \mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0(\theta)$$

$$\text{棄却域: } \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n p_{i0}(\hat{\theta}))^2}{n p_{i0}(\hat{\theta})} > \chi_{\alpha}^2(k-1-s)$$

$n_i$ : = 第  $i$  カテゴリーの観測度数

$n p_{i0}$ : = 第  $i$  カテゴリーの期待度数

$s$ : = パラメータ  $\theta$  の次元

例 下の表は 1500 年から 1931 年の間に起きた戦争の数の度数分布である．ポアソン分布とみなせるかどうかを有意水準 5% で検定してみよう．

戦争の数	0	1	2	3	4	5	計
年数	223	142	48	15	4	0	432

データの平均は  $(1 \times 142 + 2 \times 48 + 3 \times 15 + 4 \times 4) / 432 = 0.69$  であるから，データが  $Po(0.69)$  に適合するかどうかを検定すればよい．理論度数は，戦争数が  $x$  については， $432 \times e^{-0.69} 0.69^x / x!$  で計算され，次の表を得る．

戦争の数	0	1	2	3	4	5	計
理論度数	217	150	51	12	2	0	432

階級数を  $k = 5$  とする（戦争数が 5 以上は 4 と合併する）と，有意点は  $\chi^2(5-1-1) = \chi^2(3)$  の上側 5% 点  $\chi_{0.05}^2(3) = 7.81$  である．他方，検定統計値は

$$\frac{(223 - 217)^2}{217} + \frac{(142 - 150)^2}{150} + \frac{(48 - 51)^2}{51} + \frac{(15 - 12)^2}{12} + \frac{(4 - 2)^2}{2} = 3.52$$

となるので，ポアソン分布  $Po(0.69)$  に適合しているとみなすことができる．

## 8 . 独立性の検定

母集団が 2 つの属性  $A$  と  $B$  からなり， $A$  は  $r$  個， $B$  は  $c$  個のカテゴリーをもっているとす．このとき，次の確率を定義する．

$$p_{ij} = P(A = A_i, B = B_j), \quad p_{i\cdot} = P(A = A_i), \quad p_{\cdot j} = P(B = B_j)$$

## 独立性の検定

$$H_0 : p_{ij} = p_{i\cdot} \times p_{\cdot j} \quad (i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, c)$$

$$\text{棄却域} : \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^c \frac{(f_{ij} - f_{i\cdot} \times f_{\cdot j}/n)^2}{f_{i\cdot} \times f_{\cdot j}/n} > \chi_{\alpha}^2((r-1) \times (c-1))$$

$f_{ij}$ : = セル  $(A_i, B_j)$  の観測度数

$f_{i\cdot}$ : = セル  $A_i$  の観測度数

$f_{\cdot j}$ : = セル  $B_j$  の観測度数

例 下の表は、景気動向調査の結果を回答者の事業別に分類したものである。回答者の事業と景気の前想は関連があるかどうかを有意水準 5% で検定してみよう。

	金融	工業	商業	農業	行和
好転	40	55	80	75	250
後退	15	30	40	50	135
不変	20	25	30	40	115
列和	75	110	150	165	500

有意点は  $\chi^2((3-1) \times (4-1)) = \chi^2(6)$  の上側 5% 点  $\chi_{0.05}^2(6) = 12.59$  である。他方、検定統計値は

$$\frac{(40 - 250 \times 75/500)^2}{250 \times 75/500} + \frac{(55 - 250 \times 110/500)^2}{250 \times 110/500} + \dots + \frac{(40 - 115 \times 165/500)^2}{115 \times 165/500} = 4.36$$

となり、独立性の仮説は受容されるので、回答者の事業と景気の前想には関連が見られない。