# 第 2 章「確 率 分 布 の 代 表 的 モ デ ル」

## １．離散型確率分布（Discrete-type Probability Distribution）

**(1) 離散一様分布** $DU(n)$: Discrete Uniform Distribution

$$P(X = x) = \frac{1}{n} \qquad x = 1, \cdots, n$$

$$E(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad V(X) = \frac{n^2-1}{12}, \qquad P(t) = E(t^X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^i$$

**(2) 超幾何分布** $HG(N; n, p)$: Hypergeometric Distribution

$N$ 個からなる製品のうち，不良品が $M$ 個，良品が $N-M$ 個であるとする．このロットの中から，ランダムに $n$ 個 $(n < N)$ の製品を非復元抽出するとき，不良品の個数 $X$ の分布は

$$P(X = x) = \frac{{}_{M}C_{x}\ {}_{N-M}C_{n-x}}{{}_{N}C_{n}} \qquad x = 0, 1, \cdots, n$$

**（注）** 確率変数 $X$ がとりうる値の範囲は，厳密には $\max(0, n-N+M) \le X \le \min(n, M)$.

次の等式

$${}_{N}C_{n} = \sum_{x=0}^{n} {}_{M}C_{x}\ {}_{N-M}C_{n-x}$$

（証明は，$(1+t)^N = (1+t)^M\,(1+t)^{N-M}$ の両辺の $t^n$ の係数を求めよ.）

を使うことにより，

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{{}_{M}C_{x}\ {}_{N-M}C_{n-x}}{{}_{N}C_{n}} = 1$$

となることがわかる.

$$E(X) = np, \qquad V(X) = \frac{N-n}{N-1}\,np(1-p) \qquad \left(p = \frac{M}{N}\right)$$

**(3) 二項分布** $B_N(n, p)$: Binomial Distribution

成功の確率 $p$, 失敗の確率 $1-p$ の**独立試行（＝ベルヌーイ試行）**を $n$ 回行ったときの成功の回数 $X$ の 確率分布は

$$P(X = x) =_{n} C_{x} p^{x} (1-p)^{n-x} \qquad x = 0, 1, \cdots, n$$

**（注）** $n=1$ の場合の分布を**ベルヌーイ分布**という．

$$P(t)=E(t^X)=(pt+1-p)^n, \qquad E(X)=P'(1)=np, \qquad V(X)=np(1-p)$$

**・二項分布の解釈** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立に成功の確率 $p$ のベルヌーイ分布に従うとき，

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_n \sim B_N(n,p)$$

となる．このことから，$E(X)=np$, $V(X)=np(1-p)$ は容易に求められる．

**（問１）** $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が互いに独立で，確率分布

$$P(X_i=a)=p, \qquad P(X_i=-b)=1-p \qquad (a>0,\ b>0)$$

に従うとき，

$$Y_n=X_1+X_2+\cdots+X_n=Y_{n-1}+X_n \qquad (Y_0=0)$$

の確率分布を求めよ．このとき，$\{Y_n\}$ は**ランダム・ウォーク**に従うという．

(4) **ポアソン分布** $P_o(\lambda)$: Poisson Distribution

特定の時間内，あるいは場所で発生する事象の回数 $X$ の確率分布

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \lambda \quad \text{は正定数}, \qquad x=0,1,\cdots$$

$$P(t)=E(t^X)=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(t\lambda)^x}{x!}=\exp(\lambda(t-1))$$

$$E(X)=P'(1)=\lambda, \qquad V(X)=\lambda$$

**・二項分布とポアソン分布の関係：** $n\to\infty$，ただし，$np=\lambda=$一定とするとき，二項分布はポアソン分布に収束する．

(5) **幾何分布** $G(p)$: Geometric Distribution

成功の確率が $p$，失敗の確率が $1-p$ の独立試行を行うとき，初めて成功するまでに要した失敗の回数 $X$ の確率分布は

$$P(X=x)=p(1-p)^x \qquad x=0,1,\cdots$$

$$P(t)=E(t^X)=\frac{p}{1-(1-p)t}, \qquad E(X)=\frac{1-p}{p}, \qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

**・幾何分布の無記憶性**

$$P(X\geq s+t|X\geq s)=P(X\geq t)$$

**(6) 負の二項分布** $NB_N(n,p)$: Negative Binomial Distribution

成功の確率が $p$，失敗の確率が $1-p$ の独立試行を行うとき，$n$ 回成功するまでに要した失敗の回数 $X$ の確率分布は

$$P(X=x) = {}_{n+x-1}C_{n-1}\, p^n(1-p)^x = \binom{n+x-1}{n-1} p^n(1-p)^x \qquad x=0,1,\cdots$$

**・名前の由来**

負べきの展開式

$$\begin{aligned} p^{-n} &= (1-(1-p))^{-n} \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{-n}{x} (-(1-p))^x \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \binom{n+x-1}{n-1} (1-p)^x \end{aligned}$$

**(注)** ここで，

$$\begin{aligned} \binom{-n}{x} &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-x+1)}{x!} \\ &= \frac{(-1)^x(n+x-1)(n+x-2)\cdots(n+1)n}{x!} \\ &= (-1)^x \binom{n+x-1}{n-1} \end{aligned}$$

は負の二項係数である．

$$P(t) = E(t^X) = \frac{p^n}{(1-(1-p)t)^n}, \qquad E(X) = \frac{n(1-p)}{p}, \qquad V(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$$

## ２．連続型確率分布（Continuous-type Probability Distribution）

**(1) 一様分布** $U(\alpha,\beta)$: Uniform Distribution

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & (\alpha < x < \beta \quad \text{のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad V(X) = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$$

**(2) 正規（ガウス）分布** $\mathrm{N}(\mu,\, \sigma^2)$: Normal Distribution

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right)$$

**・上の密度関数をもつ正規分布の性質**
(1) 平均 $\mu$, 分散 $\sigma^2$

(2) 変曲点 ($f''(x) = 0$ となる点）は $x = \mu \pm \sigma$

(3) $X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$ ならば $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1)$．これを，$X$ の**標準化**といい，N(0,1) の分布を**標準正規分布**という．

**・密度関数であることの証明**

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\,dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)\,dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-y^2)\,dy
\end{aligned}$$

であるから，

$$J = \int_0^{\infty} \exp(-y^2)\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
J^2 &= \int_0^{\infty} \exp(-x^2)\,dx \int_0^{\infty} \exp(-y^2)\,dy \\
&= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy
\end{aligned}$$

ここで，変数変換

$$\begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\sin\theta \end{cases}$$

を考えると，変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
J^2 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} \exp(-r^2)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} \exp(-r^2)\,rdr \\
&= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\exp(-r^2)}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

**・N(0, 1) のモーメント**

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \exp(-z^2/2), \qquad f'(z) = -z\,f(z)$$

を使って

$$
\begin{aligned}
M_k &= E(Z^{2k}) = \int_{-\infty}^{\infty} z^{2k}\, f(z)\, dz = -\int_{-\infty}^{\infty} z^{2k-1}\, f'(z)\, dz \\
&= \Big[-z^{2k-1}\, f(z)\Big]_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} (2k-1)\, z^{2k-2}\, f(z)\, dz = (2k-1)\, M_{k-1} \\
&= (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1 = (2k-1)!!
\end{aligned}
$$

**・積率母関数**

$Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ のとき,

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= E(e^{tZ}) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \exp(-z^2/2)\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}(z-t)^2 + \frac{t^2}{2}\right] dz \\
&= e^{t^2/2}
\end{aligned}
$$

**(問２)** $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき，$X = \mu + \sigma\, Z$ と表せることを使って，次のことを示せ.

$$
M_X(t) = E(\exp(tX)) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)
$$

**(問３)** $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき，$V(X^2) = 2\sigma^4 + 4\mu^2\sigma^2$ となることを示せ.

**(3) 指数分布** $E_x(\lambda)$: Exponential Distribution

待ち時間，寿命，生存時間を表す確率変数 $X$ の密度関数が

$$
f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad 0 < x < \infty
$$

のとき，$X$ は指数分布に従うという.

**・生存関数 (survival function)**

一般に，$T$ を寿命を表す確率変数とするとき，$S(t) = 1 - P(T \le t) = P(T > t)$ を**生存関数**という．指数分布の場合の生存関数は

$$
S(t) = P(X > t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = \Big[-e^{-\lambda x}\Big]_t^{\infty} = e^{-\lambda t}
$$

**・故障関数 (hazard function)**

$t$ 時間以上生存していた（故障しなかった）ものが，次の瞬間に死亡（故障）する程度を $t$ の関数とみて，**故障関数**という．一般に，寿命を表す確率変数 $T$ が密度関数 $g(t)$ をもつとき，

$$
h(t) = \lim_{\triangle \to 0} \frac{P(t < T < t + \triangle | T > t)}{\triangle} = \frac{g(t)}{S(t)}
$$

を故障関数という．指数分布の故障関数は

$$
h(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda = \text{定数}
$$

となる（一般の故障関数はバスタブ型）.

**・指数分布の積率母関数とモーメント**

$$M(t) = E(e^{tX}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}, \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**（問４）** 指数分布は**無記憶性**をもつことを示せ.

**(4) ガンマ分布** $G_A(\alpha, \beta)$: Gamma Distribution

正の値のみをとる確率変数 $X$ の密度関数が

$$f(x) = \frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

と表されるとき，$X$ はガンマ分布 $G_A(\alpha, \beta)$ に従うという．ここで，

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

はガンマ関数である.

**・ガンマ関数の性質**

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \qquad \Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1) \quad (s > 1)$$

**・ガンマ分布の積率母関数とモーメント**

$$M(t) = E(e^{tX}) = (1 - \beta t)^{-\alpha}, \qquad E(X) = \alpha\beta, \qquad V(X) = \alpha\beta^2$$

**・ガンマ分布の特殊ケース**

$$G_A(1, \lambda^{-1}) = E_x(\lambda), \qquad G_A(n/2, 2) = \text{自由度 } n \text{ のカイ 2 乗分布}$$

**(5) ベータ分布** $B_E(\alpha, \beta)$: Beta Distribution

[0, 1] 上に分布する確率変数 $X$ が密度関数

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

をもつとき，$X$ はベータ分布 $B_E(\alpha, \beta)$ に従うという．ここで，

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}\, dx$$

はベータ関数である.

**・ベータ関数の性質**

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

[証明]

$$(*) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta) = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\, y^{\beta-1}e^{-y}\, dx\, dy$$

において，変数変換

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases}$$

を考えると，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -u$$

したがって，

$$\begin{aligned} (*) &= \int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}\, e^{-u}\, du \int_0^1 v^{\alpha-1}(1-v)^{\beta-1}\, dv \\ &= \Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta) \end{aligned}$$

**・ベータ分布のモーメント**

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \qquad V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

**・ベータ分布の特殊ケース**

$$B_E(1,1) = U(0,1)$$

$$X \sim G_A(\alpha,\delta),\quad Y \sim G_A(\beta,\delta) \qquad \Rightarrow \qquad X/(X+Y) \sim B_E(\alpha,\beta)$$

**（注）** 上の最後の性質の証明は，あとで確率変数の関数の分布の導出のところで行う．