# 第 5 章「確 率 過 程」

## １．確率過程（Stochastic Process）

**確率過程:** 時点 $t$ の添字をもつ確率変数 $X_t$ の系列全体のこと．$\{X_t\}$ で表す.

(a) **離散的確率過程**：時点 $t$ の集合が可算的な確率過程（通常は，t=1, 2, . . .)

(b) **連続的確率過程**：時点 $t$ の集合が連続的な確率過程（t は実数の集合の点)

**・離散的確率過程の例**：

ランダム・ウォーク，マルコフ連鎖（Markov chain），ARMA モデル（ボックス・ジェンキンスモデル），…

**・連続的確率過程の例**：

ポアソン過程，ブラウン運動（Brownian motion），マルコフ過程，Ornstein-Uhlenbeck 過程，…

## ２．ポアソン過程（Poisson Process）

$N(t)$ を時点 0 から時点 $t$ までに発生したある事象の個数とする．このとき，次の 4 つの条件をみたすならば，$\{N(t)\}$ はポアソン過程に従うという.（一般に，連続時間上の任意の時点で離散的に発生する事象の系列は**点過程（Point Process）**と呼ばれる.）

(1) $P(N(0) = 0) = 1$

(2) $P(N(t + h) - N(t) = 1) = \lambda(t)\, h + o(h) \qquad (h \to +0)$

(3) $P(N(t + h) - N(t) \geq 2) = o(h) \qquad (h \to +0)$

(4) 任意の時点 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して，増分 $N(t_2) - N(t_1), N(t_3) - N(t_2), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ は互いに独立である.

**（注）** $o(h)$ の $o$ は，Landau の small o と呼ばれ，$h \to 0$ のとき，$o(h)/h \to 0$ となる微小な量を表す.

**・チャップマン・コルモゴロフの方程式（Chapman-Kolmogorov Equation）**

$$P(N(t + s) = n) = \sum_{k=0}^{n} P(N(t) = n - k)\, P(N(t + s) - N(t) = k)$$

この方程式と，ポアソン過程の条件 (2), (3) から，

$$\begin{aligned}
P(N(t + h) = 0) &= P(N(t) = 0)\, P(N(t + h) - N(t) = 0) \\
&= P(N(t) = 0)\, [1 - \lambda(t)\ h] + o(h) \\
P(N(t + h) = n) &= P(N(t) = n)\, P(N(t + h) - N(t) = 0) \\
&\quad + P(N(t) = n - 1)\, P(N(t + h) - N(t) = 1) \\
&= P(N(t) = n)\, [1 - \lambda(t)h] + P(N(t) = n - 1)\lambda(t)h + o(h) \qquad (n \geq 1)
\end{aligned}$$

を得る．以上から，$P(N(t)=n)=P_n(t)$ とおいて，

$$\frac{d}{dt}\,P_0(t) = -\lambda(t)\,P_0(t), \qquad P_0(0)=1 \qquad (*)$$

$$\frac{d}{dt}\,P_n(t) = \lambda(t)\,[P_{n-1}(t) - P_n(t)] \qquad (**)$$

を得る．これを**コルモゴロフの前向きの微分方程式**という．

$(*)$ から，

$$P_0(t) = \exp[-\Lambda(t)], \qquad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$$

**（注）** 最初の事象が発生するまでの時間を $T$ とするとき，$P_0(t)=P(T>t)$ であり，これは，時点 0 から時点 $t$ まで事象が発生しない確率（＝最初の事象が発生するまでの時間が $t$ 以上となる確率）を表す．

**・微分方程式の解**

$P_n(t)$ の確率母関数

$$p(\theta;t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)\,\theta^n$$

を使うことにより，$(*)$ と $(**)$ から，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,p(\theta;t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\,P_n(t)\,\theta^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda(t)\,(P_{n-1}(t) - P_n(t))\,\theta^n \\ &= \lambda(t)\,(\theta-1)\,p(\theta;t)\end{aligned}$$

したがって，確率母関数は

$$p(\theta;t) = \exp[\Lambda(t)\,(\theta-1)]$$

となり，これはパラメータ $\Lambda(t)$ のポアソン分布の確率母関数であることから，

$$P_n(t) = \exp[-\Lambda(t)]\,\frac{\Lambda(t)^n}{n!} \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

を得る．

**・Homogenous なポアソン過程**

$\lambda(t)=\lambda$（定数）となる場合のポアソン過程は，homogenous（斉次的）なポアソン過程と呼ばれる．Homogenous なポアソン過程では，次のことが成り立つ．

1. $P(N(t)=k) = P(N(t+s)-N(s)=k)$
2. $T$ を事象が発生するまでの時間とするとき，$P(T<t) = 1-P(T>t) = 1-P(N(t)=0) = 1-e^{-\lambda t}$ となる．すなわち，時間間隔はパラメータ $\lambda$ の指数分布に従う．

**・ポアソン過程の例**　地震件数，飛行機事故件数，客（車）の到着数，電話の件数，…

## 3．ブラウン運動（Brownian Motion）

非負の時間軸上で定義された連続的確率過程 $\{W(t)\}$ は，次の 3 つの条件をみたすならばブラウン運動に従うという．

1. $P(W(0)=0)=1$
2. $W(t) \sim \mathrm{N}(0,t)$
3. 任意の時点 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ に対して，増分 $W(t_2)-W(t_1)$, $W(t_3)-W(t_2), \cdots, W(t_n)-W(t_{n-1})$ は互いに独立で，$W(t_i)-W(t_{i-1}) \sim \mathrm{N}(0, t_i - t_{i-1})$（定常な独立増分をもつガウス過程（Gaussian Process））

**・カルーネン・ロエーブ展開（Karhunen-Loève Expansion）**

$$W(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}\sin(n-1/2)\pi t}{(n-1/2)\pi} Z_n, \qquad \{Z_n\} \sim \mathrm{NID}(0,1)$$

**・共分散関数**

$s<t$ に対して，

$$\begin{aligned} Cov(W(s),W(t)) &= E[W(s)W(t)] = E[W(s)(W(s)+W(t)-W(s))] \\ &= E[W^2(s)] + E[W(s)(W(t)-W(s))] = s \\ &= \min(s,t) \end{aligned}$$

**・ランダム・ウォークとの関係**

時点 0 において原点から出発する離散的確率過程 $\{y_t\}$ が

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_t, \qquad \{\varepsilon_t\} \sim \mathrm{i.i.d.}(0, \sigma^2)$$

をみたすとき，ランダム・ウォークに従うという．区間 [0, 1] 上で定義されたブラウン運動は，次の分布収束が成り立つという意味でランダム・ウォークの極限である．

$$\frac{1}{\sqrt{T}\sigma}\, y_{[Tr]} \quad \Rightarrow \quad W(r) \qquad (T \to \infty)$$

**（注）** これは確率過程に対する中心極限定理であり，汎関数中心極限定理と呼ばれる．

**・ブラウン橋（Brownian Bridge）**

[0, 1] 上の時間 $t$ に対して，

$$\hat{W}(t) = W(t) - t\,W(1)$$

をブラウン橋という（$W(0)=W(1)=0$ で，始点と終点の値が等しくなることから ）．共分散関数は，

$$\begin{aligned} Cov(\hat{W}(s),\hat{W}(t)) &= E[(W(s)-sW(1))(W(t)-tW(1))] \\ &= E[W(s)W(t)] - tE[W(s)W(1)] - sE[W(1)W(t)] + stE[W^2(1)] \\ &= \min(s,t) - st \end{aligned}$$