

第 9 章「統計的推定」

・区間推定 未知のパラメータに関して，信頼度（信頼係数） $1 - \alpha$ で区間（信頼区間） $[a, b]$ に入るとい形で推定すること．

1．正規母集団の平均の区間推定

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からのサイズ n のランダム標本を $X_1, \dots, X_n$ とする．

(1) 平均の区間推定（分散既知）

$$\left[\bar{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$z_{\alpha/2}$: $N(0, 1)$ の上側 $\alpha/2$ 点

(2) 平均の区間推定（分散未知）

$$\left[\bar{X} - t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{\alpha/2}^{(n-1)} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \right]$$

$t_{\alpha/2}^{(n-1)}$: $t(n-1)$ 分布の上側 $\alpha/2$ 点

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)}$$

例 正規母集団からのサイズ 10 のランダム標本の平均は 30.47, 標準偏差は 3 であった．このとき，母集団平均 μ の信頼係数 95 % 信頼区間を求めよう．

$t(n-1) = t(9)$ 分布の上側 2.5 % 点は， $t_{0.025}^{(9)} = 2.262$ であるから，求める信頼区間は

$$\left[30.47 - 2.262 \times 3/\sqrt{10}, 30.47 + 2.262 \times 3/\sqrt{10} \right] = [28.32, 32.62]$$

となる．

2 . 正規母集団の分散の区間推定

正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からのサイズ n のランダム標本を $X_1, \dots, X_n$ とする .

(1) 分散の区間推定 (平均既知)

$$\left[\frac{n\tilde{\sigma}^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n)}, \quad \frac{n\tilde{\sigma}^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n)} \right]$$

$\chi_{\alpha/2}^2(n)$: $\chi^2(n)$ 分布の上側 $\alpha/2$ 点

$$\tilde{\sigma}^2: = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 / n$$

(2) 分散の区間推定 (平均未知)

$$\left[\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \quad \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)} \right]$$

$\chi_{\alpha/2}^2(n-1)$: $\chi^2(n-1)$ 分布の上側 $\alpha/2$ 点

$$\hat{\sigma}^2: = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$$

例 正規母集団からのサイズ 10 のランダム標本の平均は 30.47, 分散は 9 であった . このとき , 母集団分散 σ^2 の信頼係数 95 % 信頼区間を求めよう .

$\chi^2(9)$ の分布の下側 2.5 % 点は $\chi_{0.975}^2(9) = 2.7$, 上側 2.5 % 点は $\chi_{0.025}^2(9) = 19.023$ であるから , 求める信頼区間は

$$[9 \times 9/19.023, \quad 9 \times 9/2.7] = [4.26, \quad 30]$$

となる .

3 . 比率 p の区間推定

比率の区間推定（大標本の場合）

$$\left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \quad \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

$z_{\alpha/2}$: $N(0, 1)$ の上側 $\alpha/2$ 点

$\hat{p}$: = 比率の不偏推定量

例 失業率調査において，労働力人口の 10,000 人を調査したところ，500 人が失業していた．母集団失業率 p の信頼係数 95 % 信頼区間を求めよう．

$z_{0.025} = 1.96$ であるから，求める信頼区間は

$$\left[0.05 - 1.96 \times \sqrt{0.05 \times 0.95 / 10000}, \quad 0.05 + 1.96 \times \sqrt{0.05 \times 0.95 / 10000} \right] = [0.0457, \quad 0.0543]$$

となる．

4 . 2 つの正規母集団平均差の区間推定

(1) 2 つの正規分布の平均差の区間推定（分散既知）

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \quad \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \right]$$

(2) 2 つの正規分布の平均差の区間推定（ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は未知）

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - t_{\alpha/2}^{(m+n-2)} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}, \quad \bar{X} - \bar{Y} + t_{\alpha/2}^{(m+n-2)} \hat{\sigma} \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} \right]$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m+n-2} \left(\sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \right)}$$

(3) 2つの正規分布の平均差の区間推定 (大標本の場合)

$$\left[\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n}}, \quad \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_1^2}{m} + \frac{\hat{\sigma}_2^2}{n}} \right]$$

$$\hat{\sigma}_1^2 := \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

5 . 2つの正規母集団の分散比の区間推定

2つの正規分布の分散比の区間推定

$$\left[\frac{\hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)}, \quad \frac{\hat{\sigma}_1^2 / \hat{\sigma}_2^2}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)} \right]$$

$$F_{\alpha/2}(m-1, n-1) := F(m-1, n-1) \text{ 分布の上側 } \alpha/2 \text{ 点}$$

6 . 2つの母集団の比率の差の区間推定

2つの母集団の比率の差の区間推定

$$\left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}, \right. \\ \left. \hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}} \right]$$