第 9 章　検定

1　検定の手続き

検定： 母集団のパラメータに関する仮説が妥当かどうかを標本に基づいて調べること

検定の手続き

(i) パラメータに関する互いに排反な 2 組の仮説を設定する．一方を帰無仮説といい，正しいものと仮定され，検定されるべき仮説である．他方は，帰無仮説の一部あるいは全部を否定したもので，対立仮説という．

(ii) 適切な検定統計量を選択して，帰無仮説のもとでの分布（帰無分布）を求める．

(iii) 有意水準 α を設定する．

(iv) 対立仮説の形に対応して，帰無仮説の受容域と棄却域を決める．その際，帰無分布のもとで検定統計量が棄却域に入る確率を有意水準と等しくなるように，受容域と棄却域の境界点（有意点）を決める．

(v) 実際のデータから検定統計値を計算して，その値が有意点を越えるときには帰無仮説を棄却し，さもなければ受容する．

具体例：ある製薬会社が開発した新薬が旧薬よりも優れているかどうかを調べる場合

(i)　$H_0: \mu = \mu_0 \quad vs \quad H_1: \mu > \mu_0$

（μ：新薬の効能の平均レベル　μ_0：旧薬の効能の平均レベル）

これは右片側検定（cf. 両側検定，左片側検定）

(ii)　$\overline{X} \sim N(\mu_0,\ \sigma^2/n)$　**（H_0 の下で）**

$\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\hat{\sigma} \sim t(n-1)$　**（H_0 の下で）**

(iii)　**有意水準** $\alpha = 0.05$ **とする（通常は，**$0.01, 0.05$ **あるいは** 0.1**）**

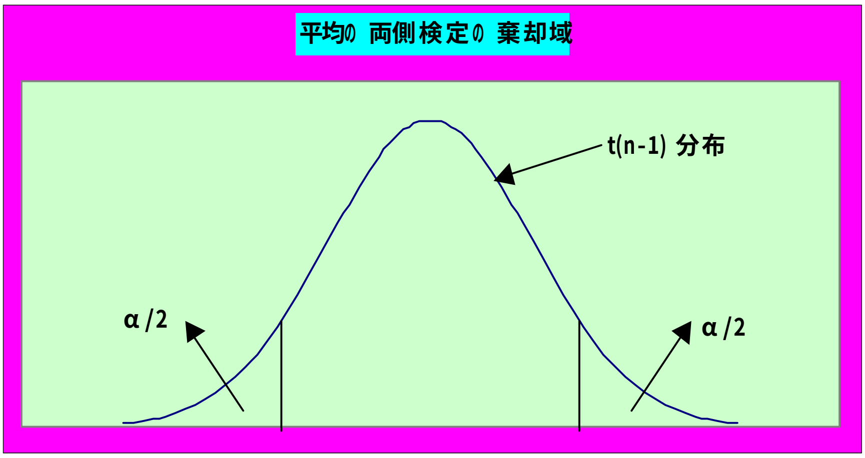
(iv)　$\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)/\hat{\sigma} \begin{cases} > t_\alpha^{(n-1)} & \text{のとき，} H_0 \text{ を棄却} \\ \leq t_\alpha^{(n-1)} & \text{のとき，} H_0 \text{ を受容} \end{cases}$

(v)　実際のデータから検定統計値を計算して，棄却，受容の判断を下す．

検定における 2 種類の誤り（互いにトレード・オフの関係） 第 1 種の誤り：帰無仮説が真のとき，棄却する誤り 第 2 種の誤り：帰無仮説が偽のとき，受容する誤り

有意水準	＝	第 1 種の誤りの確率
検出力	＝	帰無仮説が偽のとき，棄却する確率
	＝	1－第 2 種の誤りの確率

望ましい検定とは，第 1 種の誤りの確率（有意水準）を一定に低く抑えた上で，第 2 種の誤りの確率をなるべく小さくする（＝検出力をなるべく大きくする）もの



2　正規母集団における平均の検定

ここでは，両側検定を考える．

$$H_0 : \mu = \mu_0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

$\boxed{\text{分散が既知の場合}}$

棄却域

$$\frac{\sqrt{n}\,|\,\overline{X} - \mu_0\,|}{\sigma} > z_{\alpha/2}$$

$\boxed{\text{分散が未知の場合}}$

棄却域

$$\frac{\sqrt{n}\,|\,\overline{X} - \mu_0\,|}{\hat{\sigma}} > t_{\alpha/2}^{(n-1)}$$

〔例題 9.1〕 第 2 章の表 2-3 の TOPIX 収益率データを正規母集団からのランダム標本の実現値とみなすとき，母集団のリターン μ に関する次の両側検定

$$H_0 : \mu = 0 \qquad vs \qquad H_1 : \mu \neq 0$$

を有意水準 10% および 5% で行え．ただし，自由度 83 の t 分布の上側 5% 点，2.5% 点は，それぞれ 1.663，1.989 である．

（解）

$$\textbf{検定統計量} = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{\hat{\sigma}}$$

$$\textbf{検定統計値} = \frac{\sqrt{84}(-0.6325 - 0)}{5.1232} = -1.15$$

は，上下 5% 有意点を越えないから，有意水準 10% で受容，したがって，5% でも受容．

信頼区間と両側検定の関係

有意水準 α の両側検定において帰無仮説が受容されることと，信頼係数 1-α の

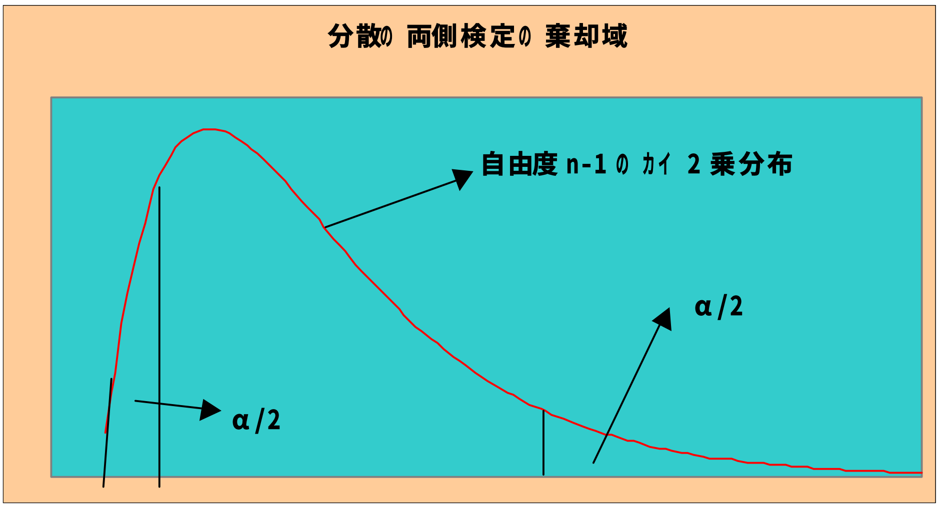
信頼区間に帰無仮説のもとでのパラメータの値が入っていることは同等である．

3　正規母集団における分散の検定

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \qquad vs \qquad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - \overline{X}}{\sigma_0}\right)^2 \quad \sim \quad \chi^2(n-1) \qquad (H_0 \text{ の下で})$$

$$\textbf{棄却域：} \quad \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} < c_{1-\alpha/2}^{(n-1)} \quad , \quad \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > c_{\alpha/2}^{(n-1)}$$



〔例題 9.2〕 あるメーカーの製品の製造工程では，製品の重量のばらつきが標準偏差 0.1 で管理されている．製品の中からランダムに 11 個を検査したところ，標準偏差

が 0.13 であった．品質管理が適正であるかどうかを有意水準 5% で検定せよ．

（解）このメーカーの製品の重量は正規分布に従うものとする．そして，検定問題として，右片側検定

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0.01 \quad vs \quad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

を考える．

$$\textbf{棄却域：} \quad \frac{(n-1)\hat{\sigma}^2}{\sigma_0^2} > c_\alpha^{(n-1)}$$

$$\textbf{検定統計値} = \frac{10 \times 0.13 \times 0.13}{0.1 \times 0.1} = 16.9 < 18.31 = c_{0.05}^{(10)} \qquad \therefore \textbf{受容}$$

4　正規母集団でない場合の検定

メディアンの検定

$$H_0 : \mu_d = \mu_{d0} \quad vs \quad H_1 : \mu_d \neq \mu_{d0} \qquad \mu_d \ \textbf{は　メディアン} \tag{9}$$

$$\Leftrightarrow \quad H_0 : P(X < \mu_{d0}) = 1/2 \quad vs \quad H_1 : P(X < \mu_{d0}) \neq 1/2 \tag{10}$$

S_{d0} **:= ランダム標本** $X_1, \cdots, X_n$ **のうち，**μ_{d0} **よりも小さいものの個数**

$\Rightarrow \quad S_{d0} \quad \to \quad N(n/2,\, n/4)$ 　　　**中心極限定理**

$$\textbf{棄却域：} \quad \frac{|S_{d0} - n/2|}{\sqrt{n}/2} > z_{\alpha/2}$$

〔例題 9.3〕 入学試験のある科目について，得点のメディアンが 50 点になるような出題を意図した．実際の採点において，ランダムに 100 人の点数を調べたところ，40 人が 50 点未満であった．意図は達成されているであろうか．有意水準 5% で検定せよ．

（解）検定問題として（9）あるいは（10）を考えることができる．

$$\textbf{検定統計値} = \frac{40 - 100/2}{\sqrt{100}/2} = -2 < -1.96 = -z_{0.025} \qquad \therefore \textbf{棄却}$$

5　成功率の検定

$$H_0 : p = p_0 \quad vs \quad H_1 : p > p_0 \tag{14}$$

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \to \quad N(p_0, \frac{p_0(1-p_0)}{n})$$ **中心極限定理**

棄却域： $$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}} > z_\alpha$$

〔例題 9.6〕 失業率調査において，労働力人口に数えられる 10,000 人を調査したところ，320 人が失業中であった．このとき，母集団失業率は 3% を越えていると考えられるかどうかを有意水準 1% で検定せよ．

（解）母集団失業率を p とするとき，検定問題は (14) と同一となる．

検定統計値 $$= \frac{0.032 - 0.03}{\sqrt{0.03 \times 0.97/10000}} = 1.17 < 2.326 = z_{0.01}$$ $\therefore$ **受容**

〔例題 9.7〕 A，B の 2 人が候補となっているある国の大統領選挙の事前調査で，投票に行くと答えた 3,600 人の有権者のうち，52% が A 候補に，48% が B 候補に投票すると回答した．A 候補は当選すると考えてよいか．有意水準 1% で検定せよ．

（解）投票における A 候補の得票率を p とする．検定問題は，

$$H_0 : p = 0.5 \qquad vs \qquad H_1 : p > 0.5$$

検定統計値 $$= \frac{0.52 - 0.5}{\sqrt{0.5 \times 0.5/3600}} = 2.40 > 2.326 = z_{0.01}$$

A **候補は，有意水準** 1% **で当選すると結論**

6 適合度検定と独立性の検定

適合度検定：複数のカテゴリーからなる母集団における，それぞれの比率の検定

独立性の検定：属性間の独立性の検定

（いずれも，カイ 2 乗分布に基づく検定を使う．→例題 9.7，9.8 を参照）

7 検定方式と検出力

省略